УДК 004.056.5

Безштанько В.М.

АНАЛИЗ МЕТОДОВ РЕШЕНИЙ НЕОДНОРОДНЫХ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИОФАНТОВЫХ УРАВНЕНИЙ В КОНТЕКСТЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ РИСКОВ

Аннотация:

В работе проводиться анализ существующих методов решений и накладываемых ограничений на неоднородное положительное линейное диофантовое уравнений используемое для формирования модели количественного расчета рисков безопасности информации.

Анотація:

У роботі проводиться аналіз існуючих методів рішень та обмежень, які накладаються на неоднорідне позитивне лінійне діофантовне рівняння, яке використовується для формування моделі кількісного розрахунку ризиків безпеки інформації.

Abstract:

The work carried out an analysis of existing methods of making and imposed restrictions on the non-uniform positive linear Diophantine equations used to generate quantitative risk calculation model of information security.

Актуальность

Одним из элементов эффективной системы менеджмента безопасности информации в организации, является процесс управления рисками. Основные правила и рекомендации по использованию и внедрению такого процесса изложены в работах [1-4]. В работе [3] для определения уровня риска, предлагается использовать качественную, количественную или комбинированную методики оценки рисков. Но только при использовании количественных методик оценки рисков возможно проведение глубокого анализа источников угроз для отдельно взятого актива. Применение таких методик позволяет финансировать затраты, необходимые для выбора мер защиты информации. Процесс количественной оценки рисков безопасности информации достаточно сложен и требует использования специальных инструментальных средств, моделей и методик. В настоящей работе предлагается подход к моделированию оценок рисков на основе постановки задачи в виде диофантового уравнения в области положительных чисел.

Постановка задачи

Пусть r - является произведение величины ущерба a на частость его возникновения x. Соответственно, для одного актива можно записать следующее выражение для оценивания риска:

$$ax = r \ . \tag{1}$$

Значения приемлемого риска r каждая организация устанавливает для себя индивидуально [4]. Величина ущерба a может определяться экспертными методами. Величина x, представляющая собой частость возникновения ущерба, должна определяться на основе статистических данных о количестве инцидентов и, как правило, на начальном этапе оценивания рисков является неизвестной. Если значения величин r и a известны, то соотношение (1) можно рассматривать как уравнение с одним неизвестным относительно x. Очевидно, что в этом случае нахождение x является тривиальной задачей. Однако, для стабильного развития организации важным является выполнение условия, при котором значения суммарных рисков $\sum_{j=1}^{n} a_j x_j$ не должно превышать некоторого приемлемого значения $r_{\max}$:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \le r_{\max}. \tag{2}$$

Это приводит к необходимости решать уравнение, включающее n неизвестных, вида:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_j x_j = r. \tag{3}$$

В реальных ситуациях зачастую допускается выполнение оценки величины риска $r_{\max}$ и ущерба a_j с точностью до целых чисел. Если оценку частостей x_j проводить в целых процентах, то соотношение (3) можно трактовать, как диофантово уравнение относительно x_j. Учитывая, что линейное диофантово уравнение (3) в общем случае либо не имеет решений, либо имеет бесконечное множество решений, реализаций ограничения (2) должна обеспечиваться за счет выполнения некоторых дополнительных условий, в частности, такие условия могут быть следствиями ограничения на решение уравнения (3) во множестве положительных целых чисел Z_+. Следует сразу отметить, что согласно [5,6] задача целочисленного решения линейного диофантового уравнения в неотрицательной области является *NP*-полной, а в некоторых случаях *overNP*-полной задачей. Тем не менее, в случае относительно небольшого количества неизвестных уравнения (3) и наличия результативных ограничений на его решение, выполнение полного перебора может не быть непреодолимым препятствием для современных средств компьютерного моделирования.

Решение задачи

Известно, что для решения уравнения (3) в Z_+ необходимо выполнение ряда условий, изложенных в работах [7-10], а именно:

1. Уравнение вида (3) где, $a_j \in Z_+$, $x_j \in Z$, $r \in Z_+$ разрешимо в целых числах, если наибольший общий делитель d чисел $a_1,\ldots a_j$ является делителем числа r. Таким образом, $r = dt$, где t - некоторое целое число.

Следствие. Если некоторые целые числа $x_1,\ldots x_j$ удовлетворяют уравнению (3), то d будет делителем каждого произведения чисел $a_1 x_1 \ldots . a_j x_j$, а также будет делителем их суммы r. В этом случае будем говорить, что d является делителем уравнения (3).

2. Если наибольший общий делитель больше единицы $(d > 1)$, то при преобразовании уравнения (3) к $d = 1$ количество решений и их значения не изменятся, а коэффициенты $a_1 \ldots . a_j$ и r преобразуются в соответствующие взаимно простые числа.

3. Для существования $d > 1$ уравнения вида (3) необходимо чтобы r не был простым числом.

4. Из пунктов 1 и 3 следует, что если r - простое число, то для существования целочисленного решения уравнения (3) необходимо, чтобы наибольший общий делитель d чисел $a_1 \ldots . a_j$ был равен единице.

5. Для существования положительного целочисленного решения уравнения (3) необходимо в дополнение к условиям по п.1. или п.4 выполнение следующего условия

$$r \ge (a_1 + \ldots . + a_j).$$

6. Уравнение вида (3) разрешимо в целых положительных числах, если выполняется условие

$$r > \prod_{j=1}^{n} a_j .$$

Проанализируем известные методы решения НПЛДУ с учетом изложенных ограничений.

Методы решения уравнений для двух неизвестных

В начале, рассмотрим существующие методы решений на примере двух неизвестных:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 = r \,. \tag{4}$$

Метод 1.

Предположим, что было найдено частное решения $\{x_1', \, x_2'\}$ уравнения (4). Вычтем полученные уравнение $a_1 x_1' + a_2 x_2' = r$ из уравнения (4). Запишем уравнение в следующем виде:

$a_1(x_1 - x_1') + a_2(x_2 - x_2') = 0$, соответственно $a_1(x_1 - x_1') = -a_2(x_2 - x_2')$, $(x_1 - x_1') = \dfrac{-a_2(x_2 - x_2')}{a_1}$.

Из полученного выражения следует, что $(x_1 - x_1')$ будет целым числом только при условии, что выражение $(x_2 - x_2')$ делится нацело на a_1. То есть можно записать $x_2 - x_2' = a_1 t$, где $t \in Z$ (множество целых чисел) тогда,

$$\begin{cases} x_1 = x_1' - a_2 t \\ x_2 = x_2' + a_1 t \end{cases}, \text{ где } t \in Z \,.$$

Для получения целочисленного положительного результата необходимо выполнения дополнительных ограничений $a_2 t < x_1'$ и $a_1 t < x_2'$.

Пример. Решим уравнение

$$4x_1 + 3x_2 = 54 \,. \tag{5}$$

Допустим, что для уравнения (5) с помощью генетического алгоритма [12] найдено частное решение. Это будет пара чисел $x_1' = 9, x_2' = 6$. Тогда, общее решение для рассматриваемого уравнения можно представить в виде:

$$\begin{cases} x_1 = 9 - 3t \\ x_2 = 6 + 4t \end{cases} \quad \text{где, } t \in Z \,.$$

Следовательно, для рассматриваемого примера $-3t < -9$ и $4t < -6$, или $-1{,}5 < t < 3$.

В соответствии с заданными ранее ограничениями $x_j \in Z_+$, коэффициент t может приобретать следующие значения $\{-1, \, 0, 1, \, 2\}$. Тогда решениями уравнения (5) будут пары чисел $\{12, 2\}, \{9, 6\}, \{6, 10\}, \{3, 14\}$. Интерпретация этих решений представляет собой пары значений частости величин $\{x_1, x_2\}$, а именно 12% и 2%; 9% и 6%; 6% и 10%; 3 % и 4%.

Выбор конкретной пары значений должен диктоваться контекстом оценивания риска, доступным экспериментатору.

Метод 2.

Допустим, что в уравнении (4) коэффициенты подчиняются условию $a_2 < a_1$. Тогда, решим уравнение (4) относительно неизвестного, при котором наименьший коэффициент, то есть относительно x_2. После выполненных преобразований над уравнением (4) получим: $a_2 x_2 = r - a_1 x_1$, $x_2 = \dfrac{r - a_1 x_1}{a_2}$.

Пример. Решим уравнение (5).

Решение начнем относительно переменной x_2, так как у нее меньший коэффициент. После выполненных преобразований с уравнением (5) придем к $x_2 = \frac{54-4x_1}{3}$. Для соблюдения условия $x_j \in Z_+$ необходимо чтобы $54-4x_1>0$, значит $-4x_1>-54$, $x_1<13{,}5$. Подставляя в полученное выражение произвольные положительные целочисленные значения вместо x_1 находим положительное целочисленное значения x_2, решаемого уравнения.

Если,

$$x_1=1 \text{ то } x_2=\frac{54-4}{3}=\frac{50}{3}$$

$$x_1=2 \text{ то } x_2=\frac{54-8}{3}=\frac{46}{3}$$

$$x_1=3 \text{ то } x_2=\frac{54-12}{3}=\frac{42}{3}=14\in Z_+$$

Частным решением уравнения (5) будут пара чисел $\{3,14\}$. Продолжая решать рассматриваемое уравнения по предложенным способом, найдем все целочисленные положительные решения $\{3,14\},\{6,10\},\{9,6\},\{12,2\}$. Значит при решении уравнения (4) вторым методом для получения целочисленных положительных результатов необходимо выполнение следующих дополнительных ограничений: $r-a_1x_1>0$, а также $r-a_1x_1$ должно нацело делиться на a_2.

Метод 3.

Решение линейного диофантового уравнения основывается на свойствах наибольшего общего делителя d. Для решения уравнения (4) используем алгоритм Евклида.

Допустим что $a_1>a_2$, Тогда можно выполнить деление коэффициентов a_1 на a_2 с остатком. Тогда:

$$\begin{aligned}
a_1 &= a_2q_1+n_1;\\
a_2 &= n_1q_2+n_2;\\
n_1 &= n_2q_3+n_3;\\
n_{n-1} &= n_nq_n.
\end{aligned} \tag{6}$$

Представим наибольший общий делитель n_3 коэффициентов a_1,a_2 в линейном виде13]:

$$\begin{aligned}
n_3 &= n_1+(-q_3)n_2=n_1+(-q_3)(a_2+(-q_2)n_1)=a_1+(-q_1)a_2+(-q_3)(a_2+(-q_2)(a_1+(-q_1)a_2))=\\
&=a_1+(-q_1)a_2+(-q_2)(-q_3)a_1+(-q_3)(-q_2)(-q_1)a_2+(-q_3)a_2.
\end{aligned}$$

В результате получим линейное представление d коэффициентов a_1,a_2, то есть представление наибольшего общего делителя в виде:

$(a_1,a_2)=a_1u+a_2v$, где u и v коэффициенты Безу, которые можно представить в виде:

$$\begin{aligned}
u &= 1+(-q_2)(-q_3)\\
v &= -q_1+(-q_3)(-q_2)(-q_1)+(-q_3).
\end{aligned}$$

Решения уравнения (4) можно представить:

$$\begin{cases} x_1 = x_1' - vt \\ x_2 = x_2' + ut \end{cases}, \text{ где } t \in Z,$$

а x_1', x_2' - частные решение уравнения (4).

Пример. Решим уравнение (5).

По формуле (6) найдем d коэффициентов (4, 3).

$$4 = 3 \times 1 + 1;$$

$$3 = 1 \times 3 + 0.$$

Запишем его линейное представление:

$$(4{,}3) = 1 \times 4 + (-1) \times 3.$$

Найдем частные решения уравнения (5):

$$\begin{cases} x_1' = ur = 1 \times 54 = 54; \\ x_2' = vr = (-1) \times 54 = -54 \end{cases}, \text{ где}$$

$$u = 1, v = -1.$$

Запишем общее решение:

$$\begin{cases} x_1 = 54 - 3t \\ x_2 = -54 + 4t \end{cases}, \text{ где } t \in Z.$$

Для нахождения приемлемых значений частости возникновения ущерба необходимо чтобы x_1 и x_2 приобретали целочисленные положительные значения. В рассматриваемом примере это возможно, если $54 - 3t > 0$ и $-54 + 4t > 0$. Соответственно $3t < 54$ и $4t > 54$ и $13{,}5 < t < 18$, следовательно $t \in Z_+$. При $t = \{14{,}15{,}16{,}17\}$ решением уравнения (5) будут следующие пары чисел $\{12, 2\}, \{9, 6\}, \{6, 10\}, \{3, 14\}$. Обобщая результат показанный в примере, можно сформулировать следующие дополнительные ограничения для диапазона искомых значений частот нанесения ущерба в предложенной модели: $\frac{r}{a_1} < t < \frac{r}{a_2}$, где $t \in z$, а $a_1 > a_2$.

Метод 4.

Решения уравнения (4) метод непрерывной (цепной) дроби. Решение x_1 и x_2 будем искать в виде

$$x_1 = x_1' + x_1'',$$
$$x_2 = x_2' + x_2'',$$

где $\{x_1', x_2'\}$ частное решение уравнения (4), а $\{x_1'', x_2''\}$ частное решение уравнения

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0. \tag{7}$$

Представим коэффициенты a_1, a_2 уравнения (4) в виде цепной дроби [11]. Пусть $a_1 > a_2$, тогда дробь $\frac{a_1}{a_2}$ запишем в виде суммы целой части и правильной дроби:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2 q_0 + n_0}{a_2} = q_0 + \frac{1}{\frac{a_2}{n_0}} = q_0 + \frac{1}{\frac{q_1 n_0 + n_1}{n_0}} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{\frac{n_0}{n_1}}} = \ldots\ldots = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \ldots . \frac{1}{q_n}}},$$

где q_n - неполные частные, а n_n - остатки из алгоритма Евклида.

Также, для преобразования рационального числа к виду цепной дроби, можно использовать алгоритм Евклида (6) [13]. Если при построении цепной дроби остановиться на знаменателе q_n, то получиться подходящая дробь $[q_0, q_1, q_2 \dots q_n]$, которую обозначают $\frac{P_n}{Q_n}$. Найдем вид некоторых подходящих дробей:

$$\frac{P_0}{Q_0} = \frac{q_0}{1}; \quad \frac{P_1}{Q_1} = q_0 + \frac{1}{q_1} = \frac{q_0 q_1 + 1}{q_1}; \frac{P_2}{Q_2} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2}} = \frac{q_2(q_0 q_1 + 1) + q_0}{q_2 q_1 + 1} = \frac{q_2 P_1 + P_0}{q_2 Q_1 + Q_0}.$$

Для рационального числа $\frac{a_1}{a_2}$ последовательность подходящих дробей конечна, и ее последний элемент $\frac{P_n}{Q_n} = \frac{a_n}{a_{n+1}}$. Числитель и знаменатель $(n+1)^{-й}$ дроби могут быть найдены по формулам:

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= q_{n+1} P_n + P_{n-1}; \\ Q_{n+1} &= q_{n+1} Q_n + Q_{n-1}. \end{aligned}.$$

Числитель и знаменатель связанны между собой следующим соотношением:

$$P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n = (-1)^{n-1}.$$

Все подходящие дроби несократимы, а последняя подходящая дробь совпадает по значению с рациональным числом:

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{a_1}{a_2},$$

где $d\ (a_1, a_2) = 1$. Тогда,

$$a_1 Q_{n-1} - a_2 P_{n-1} = (-1)^{n-1} \tag{8}$$

Умножим равенство (7) на $(-1)^{n-1} r$. Получим $a_1\left(Q_{n-1}(-1)^{n-1} r\right) - a_2\left(P_{n-1}(-1)^n r\right) = r$.

В качестве частного решения уравнения (4) возьмем

$$\begin{aligned} x_1' &= Q_{n-1}(-1)^{n-1} r \\ x_2' &= P_{n-1}(-1)^n r \end{aligned}.$$

Используя метод 1 для решения уравнения (7) придем к

$$\begin{aligned} x_1'' &= a_2 t \\ x_2'' &= -a_1 t \end{aligned}, \text{ где } t \in Z.$$

Таким образом, можно сказать, что решением уравнения (4) можно представить в виде:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1' + x_1'' = Q_{n-1}(-1)^{n-1} r + a_2 t \\ x_2 &= x_2' + x_2'' = P_{n-1}(-1)^n r - a_1 t \end{aligned}, \text{ где } t \in Z.$$

Пример. Решим уравнение (5).

Преобразуем к виду цепной дроби коэффициенты:

$$\frac{4}{3} = \frac{3 \cdot 1 + 1}{3} = 1 + \frac{1}{\frac{3}{1}} = 1 + \frac{1}{\frac{3 \cdot 1 + 0}{1}} = 1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\frac{1}{0}}} = [1,3].$$

Коэффициенты:

$$\frac{P_0}{Q_0}=\frac{1}{1}; \quad \frac{P_1}{Q_1}=\frac{q_0q_1+1}{q_1}=\frac{4}{3};$$

Следовательно

$$x_1'=Q_{n-1}(-1)^{n-1}r=1\cdot(-1)^0\cdot 54=54$$

$$x_2'=P_{n-1}(-1)^n r=1\cdot(-1)^1\cdot 54=-54$$

Частными решениями уравнения (5) будут

$$x_1''=3t$$

$$x_2''=-4t$$

Подставляя полученные выражения в (6) получим:

$$\begin{cases} x_1=x_1'+x_1''=54+3t \\ x_2=x_2'+x_2''=-54-4t \end{cases} \quad \text{где } t\in Z.$$

Для нахождения приемлемых значений частости возникновения ущерба x_1, x_2 в области неотрицательных значений необходимо чтобы $54+3t>0$, соответственно $3t>-54$, или $t>-18$. И $-54-4t>0$, $4t<-54$ или $t<-13{,}5$. Соответственно, для получения целочисленных положительных значений x_1, x_2, в предлагаемой модели расчета рисков необходимо чтобы $-18<t<-13{,}5$ где $t\in Z$. При $t=\{-14,-15,-16,-17\}$ решением уравнения (5) будут следующие пары чисел $\{12,2\},\{9,6\},\{6,10\},\{3,14\}$. Следовательно, для уравнения (4) возможно введение дополнительных ограничений $-\frac{r}{a_2}<t<\frac{r}{a_1}$, где $t\in Z$, а $a_1>a_2$.

Методы решения уравнений для трех неизвестных

На практике, как правило, анализ рисков проводиться в системе, состоящей из более чем двух активов. Следовательно, возникает необходимость в проведении анализа методов решения уравнений содержащих из $n>2$ неизвестных. Далее допустим, что проводиться анализ рисков в системе, состоящей из трех активов. Для такой системы можно записать линейное диофантово уравнение с тремя неизвестными вида:

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=r. \qquad (9)$$

Рассмотрим существующие методы решения линейных диофантовых уравнений для такой системы.

Метод 1.

На практике, при формировании модели количественного анализа рисков, может возникать ситуация, когда значения величины a_1, a_2, a_3 ущерба имеют приблизительно равные значения $a_1\approx a_j$. Следовательно, можно предположить, что два коэффициента из уравнения (9) равны, то есть $a_1=a_2$, значит $x_1+x_2=y$, тогда уравнение (9) можно записать в виде:

$$a_1y+a_3x_3=r \qquad (10)$$

Решив уравнение любым из ранее рассмотренных методов для двух неизвестных, получим значение y. Соответственно значение $x_2=y-x_1$.

Пример. Пусть, величины ущерба, коэффициенты a_1, a_2, a_3 принимают целочисленные положительные значения $\{4,4,3\}$, приемлемый риск $r=54$. Необходимо найти приемлемые значения частости возникновения ущерба для недопущения превышения рисков. Составим уравнение:

$$4x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 54. \tag{11}$$

Допустим что $x_1 + x_2 = y$, тогда уравнение (11) можно привести к следующему виду:

$$4y + 3x_3 = 54. \tag{12}$$

Используя ранее предложенные методы решения НПЛДУ для двух неизвестных, найдем частное решение уравнения (12). Это будет пара чисел $\{3,14\}$. Далее определим значение переменной $x_2 = y - x_1 = 3 - x_1$. Подставляя, вместо x_1 значения $\{1,2\}$ для переменной x_2 получим следующие значения $\{2,1\}$. Следовательно, для уравнения (11) решением могут быть числа $\{1,2,14\}$ или $\{2,1,14\}$. Для получения множества всех решений уравнения (11) необходимо его решить с использованием все частные решения равнения (12). В рассматриваемом примере, для получения целочисленных положительных решений, кроме ограничений, обусловленных применяемым методом решения уравнении (12) для двух неизвестных, в процессе решения уравнения (9) необходимым является выполнение дополнительного условия $y > x_1, x_2$.

Метод 2.

Среди коэффициентов a_1, a_2, a_3 уравнения (9) выберем наименьший. Допустим что $a_1 < \{a_2, a_3\}$.

Разделим a_2 и a_3 на a_1 с остатком. Получим:

$$\begin{matrix} a_2 = q_2 a_1 + w_1 \\ a_3 = q_3 a_1 + w_2 \end{matrix}, \text{ где } 0 \le w_1 < a_1 \text{ и } 0 \le w_2 < a_2.$$

Подставим полученные выражения в уравнение (9). Получим:

$$a_1 x_1 + (q_2 a_1 + w_2) x_2 + (q_3 a_1 + w_3) x_3 = r$$

или,

$$a_1 (x_1 + q_2 x_2 + q_3 x_3) + w_2 x_2 + w_3 x_3 = r \tag{13}$$

Пусть

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + q_2 x_2 + q_3 x_3 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_3 \end{cases},$$

тогда уравнение (13) можно записать

$$a_1 y_1 + w_2 y_2 + w_3 y_3 = r.$$

Проведенный процесс преобразования уравнения (13) имеет следующие свойства[13]:

- новое полученное уравнение либо имеет меньшее количество переменных, либо меньшие коэффициенты при переменных;
- если хоть один из остатков w_2, w_3 преобразованного уравнения равен нулю, то количество переменных сокращается.

Соответственно для уравнения (13) $x_1 = y_1 - q_2x_2 - q_3x_3$, $x_2 = y_2, x_3 = y_3$.

Поскольку последовательность убывающих натуральных чисел не может быть бесконечной, то придем либо к уравнению с одним неизвестным, либо к уравнению в котором все коэффициенты a_1, a_2, a_3 будут равны.

Пример. Используя предложенный метод, решим уравнение

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 54. \tag{14}$$

Разделим 4 и 3 на 2 с остатком. Получим:

$$4 = 2 \cdot 2 + 0$$

$$3 = 1 \cdot 2 + 1$$

Поставим полученные числовые значения в уравнение (14). Запишем выражение:

$$2(x_1 + x_2 + 2x_3) + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 54.$$

Пусть, $y_1 = x_1 + x_2 + 2x_3, y_2 = x_2, y_3 = x_3$,

тогда получим выражение

$$2y_1 + y_2 = 54. \tag{15}$$

Решим уравнение (14)относительно переменной y_1. Тогда, $y_1 = \dfrac{54 - y_2}{2}$.

Пусть частным решением уравнения (14) будут числа $y_1 = 26$ и $y_2 = 2$. Из выражения $y_1 = x_1 + x_2 + 2x_3$ найдем x_1.

$x_1 = 26 - x_2 - 2x_3$. Пусть $x_2 = y_2 = 2$, следовательно, $x_1 = 26 - 2 - 2x_3$, или

$$x_1 + 2x_3 = 24. \tag{16}$$

Выше предложенным методом 1 для двух неизвестных решим уравнение (16). Получим:

$$\begin{cases} x_1 = 10 - 2t \\ x_3 = 7 + t \end{cases}, \text{ где } t \in z,$$

а частным решением уравнения (16) будет пара чисел $\{10,7\}$. Допустим, $t = 1$, следовательно, $x_1 = 8, x_3 = 8$. Частным решением уравнения (14) будут числа $\{8,2,8\}$.

Для получения целочисленных положительных решений частости возникновения ущерба x_j рассматриваемой модели количественного анализа рисков, кроме ограничений обусловленных применяемым методом решения уравнения для двух неизвестных, в процессе решения необходимым является выполнения условия $y_1 < q_2x_2 - q_3x_3$.

Метод 3.

Рассмотрим уравнение (9)

Пусть $a_1 > a_2$,

Разделив с остатком a_1 на a_2, получим $a_1 = a_2u + v$.

Подставим полученное выражение в уравнение (9):

Получим:

$(a_2u + v)x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = r$, или $a_2(ux_1 + x_2) + vx_1 + a_3x_3 = r$.

Пусть $t_1 = ux_1 + x_2$, тогда уравнение примет вид $3t_1 + x_1 + a_3x_3 = r$, а $t_2 = a_3x_3$, получим $3t_1 + x_1 + t_2 = r$.

Следовательно,

$$\begin{cases} x_1 = r - a_2 t_1 - t_2 \\ x_2 = t_1 - x_1 = t_1 - (r - a_2 t_1 - t_2) = a_2 t_1 + t_1 + t_2 - r, \text{где } t \in Z. \\ x_3 = \dfrac{t_2}{a_3} \end{cases}$$

Целочисленные положительные решение уравнения (9) можно получить, если будут выполняться дополнительные условия, $a_2 t_1 + t_1 + t_2 > r$, и t_2 без остатка будет делиться на a_3.

Пример. Решить в целых числах уравнение

$$4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 54. \tag{17}$$

Разделим с остатком 4 на 3, получим 4 = 3(1) + 1. Представим уравнение (17) в виде $3(x_1 + x_2) + x_1 + 2x_3 = 54$. После замены, $t_1 = x_1 + x_2$, уравнение примет вид $3t_1 + x_1 + 2x_3 = 54$. Пусть $t_2 = 2x_3$. Тогда $3t_1 + x_1 + t_2 = 54$. После выполнения преобразований получим решение уравнения (15) в следующем виде:

$$\begin{cases} x_1 = 54 - 3t_1 - t_2 \\ x_2 = t_1 - x_1 = t_1 - (54 - 3t_1 - t_2) = 4t_1 + t_2 - 54, \text{где } t \in Z. \\ x_3 = \dfrac{t_2}{2} \end{cases}$$

При решении уравнения (17) целочисленные положительные результаты будут получены, если выполняются дополнительные условия $3t_1 + t_2 < 54$, а $4t_1 + t_2 > 54$ и t_2 четное положительное число лежащее в пределах $54 - 4t_1 < t_2 < 54 - 3t_1$. Следовательно, в процессе решения уравнения (17) для t_1 можно задать следующие условия $\dfrac{54 - t_2}{4} < t_1 < \dfrac{54 - t_2}{3}$. Частным решение данного уравнения при $t_1 = 14, t_2 = 2$ будут числа $\{10, 3, 1\}$. Подобные рассуждения, возможно применять в процессе решения задачи поиска частоты возникновения ущерба в рассматриваемой модели риска.

Выводы

В работе проведен анализ существующих методов решения НПЛДУ используемых в процессе моделирования рисков. Проведенный анализ полученных результатов позволяет наложить на исследуемую модель ограничения, свойственные области положительных целых чисел, что позволяет перейти от рассмотрения бесконечного множества решений к решению переборной задачи с допустимым числом рассматриваемых вариантов.

Благодарности

Автор выражает благодарность профессору Мохору В.В. за постановку задачи сформулированной в настоящей работе и плодотворные консультации в процессе ее решения.

Литература:

1. *BS 7799-3:2006* Information security management systems. Guidelines for information security risk management.

2. *BSI Standard 100-2 IT*-Grundschutz Methodology.

3. *ISO/IEC 31010:2009* Risk management -- Risk assessment techniques.

4. *ISO/IEC 27001:2005* Information technology -- Security techniques -- Information security management systems – Requirements.

5. *Д.А.Зайцев* О реализации композиционных алгоритмов решения систем линейных уравнений/Управляющие системы и машины, №3/2006 г

6. *Корзун Д.Ж.,* Богоявленский Ю.А. Общий вид решений системы линейных диофантовых уравнений, ассоциированной с контекстно-свободной грамматикой.

7. *В.Серпинский.* О решении уравнений в целых числах./Государственное издательство физико-математической литературы/Москва 1961год.

8. *Бардушкин В.В.,* Кожухов И.Б., Прокофьев А.А., Фадеичева Т.П. Основы теории делимости чисел. Решение уравнений в целых числах. Факультативный курс. – М.: МГИЭТ(ТУ), 2003. – 224 с.

9. *Caaтi Т.Л.* Целочисленные методы оптимизации и связанные с ними экстремальные проблемы. - М.: Мир, 1973. – 181с.

10. *Схрейвер А.* Теория линейного и целочисельного программирования: в 2-х т. Т.1: пер с англ. – М.: Мир, 1991. -360с., ил.

11. *Азовская Т.В.,* Севастьянова В.В., Задачи по теории чисел / учебное пособие. Самара: Издательство «Самарский университет», 2009 год – 72 стр.

12. *В.М.Безштанько,* С.И.Душкевич. Анализ результатов испытаний генетических алгоритмов при количественном расчете рисков информационной безопасности в условиях отсутствия статистических данных о частости реализации угроз. Національна академія наук України, Збірник наукових праць, Інститут проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є.Пухова. Випуск 60, Київ 2011.

13. *Банникова Т.М.*, Баранова Н.А. Основы теории чисел/ учебно-методическое пособие. Ижевск -2009 год.