TELECOMMUNICATION SYSTEMS AND NETWORKS

DOI 10.20535/2411-1031.2022.10.1.261178
УДК 621.391.17

ВІКТОР ЄРОХІН,
ОЛЕКСАНДР ВАКУЛЕНКО

ЕВОЛЮЦІЯ АЛГОРИТМІВ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗДІЛЕННЯ ДВОХ ВЗАЄМНО НЕОРТОГОНАЛЬНИХ СИГНАЛІВ ДВІЙКОВОЇ ФАЗОВОЇ МОДУЛЯЦІЇ

Виконаний огляд результатів розвитку методики синтезу алгоритмів розділення-демодуляції двох взаємно неортогональних на довжині інформаційного тактового інтервалу сигналів двійкової фазової модуляції, синхронних та асинхронних за тактовими точками, з неперервним та переривчастим випромінюванням. Еволюція алгоритмів оптимального розділення двох взаємно неортогональних сигналів двійкової фазової модуляції має наступну послідовність: сигнали є взаємно синхронними за тактовими точками (канал зв'язку – з постійними параметрами, несівні коливання представлені функціями $s_{1,2}(t)$, інтегрованими з квадратом; сигнали є взаємно синхронними за тактовими точками, другий сигнал, що заважає – переривчастий; сигнали є взаємно асинхронними за тактовими точками; сигнали є взаємно асинхронними за тактовими точками, другий сигнал, що заважає – переривчастий; сигнали є взаємно синхронними за тактовими точками, обидва сигнали – переривчасті. При цьому за критерій оптимальності передбачався мінімум імовірності помилки в оцінці дискретного інформаційного параметру першого (корисного) сигналу. Результати порівняльного огляду алгоритмів розділення двох взаємно неортогональних сигналів двійкової ФМ демонструють їх еволюційний характер. Виявлені основні закономірності надають змогу одержувати описи процедур розділення сигналів з неспівпадаючими тактовими частотами без виконання проміжних процедур обробки сигналу. Поступовий процес ускладнення постановки задач на синтез призвів до виявлення поступових закономірностей в структурах алгоритмів розділення-демодуляції двох сигналів двійкової ФМ, що надає можливість сформулювати напрямки подальших досліджень, які мають ґрунтуватись на положеннях теорії багатокористувацького детектування. А саме, виявлені закономірності є підґрунтям для проведення подальших досліджень з метою розв'язання подібних задач з поступовим подальшим ускладненням початкових умов. Першочерговому розгляду в майбутньому підлягають задачі, які мають теоретичний інтерес і практичну цінність: коли обидва сигнали характеризуються нестаціонарними переривчастими режимами випромінювання та асинхронні за тактовими точками; коли вони характеризуються пакетним режимом передачі; коли застосовуються смуго-ефективні види модуляції (MSK, GMSK – в першу чергу).

Ключові слова: теорія багатокористувацького детектування, взаємно неортогональні цифрові сигнали, дискретний інформаційний параметр, правило прийняття рішень, переривчаста завада, подібна до корисного сигналу, сигнальна функція, апостеріорні імовірності.

Постановка проблеми. Потреби в канальному ресурсі для мобільних телекомунікаційних систем об'єктивно зростають. Задовільнення цих потреб може досягатись декількома шляхами – удосконаленням процедур просторово-часової обробки, протоколів випадкового множинного доступу, алгоритмів демодуляції в приймальних пристроях тощо.

Одним з перспективних шляхів розв'язання проблем, породжуваних зростанням вищезазначених потреб, є застосування методів сучасної теорії багатокористувацького детектування [1] - [12] та ін., яка передбачає пошук шляхів повторного використання канального ресурсу на основі синтезу алгоритмів розділення цифрових сигналів, що характеризуються відмінною від нуля їх взаємною енергією на інформаційних тактових інтервалах.

Об'єктом дослідження є процеси функціонування цифрових радіоліній в узагальненому ресурсі.

Предметом дослідження є алгоритми розділення двох взаємно неортогональних сигналів двійкової ФМ.

Огляд узагальнює і систематизує відомі на сьогодні результати синтезу алгоритмів розділення-демодуляції двох двійкових сигналів ФМ, синхронних та асинхронних за тактовими точками та таких, що характеризуються неперервним та переривчастим характером випромінювання.

Результати доцільно використовувати для проведення подальших перспективних науково-інженерних досліджень щодо розробки технологічних алгоритмів розділення двох взаємно неортогональних сигналів з кутовими видами модуляції. Наведені тут алгоритми розділення-демодуляції є підґрунтям для визначення потенційних меж їх завадостійкості в подальшому.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Пошуком можливостей повторного застосування частотного ресурсу приділяється багаторічна невпинна увага [1] - [12]. Основою теоретичних досліджень в зазначеній галузі є теорія багатокористувацького детектування – БКД (Multiuser detection theory – MDT [2], [4], [6], [9]) і її відгалуження – статистична теорія розділення цифрових сигналів – СТРЦС [1], [3], [5], [7] - [12]. Одним з перспективних напрямів розвитку теорії БКД є пошук підоптимальних технологічних алгоритмів розділення двох взаємно неортогональних сигналів двійкової кутової модуляції (КМ) та пошук меж їх завадостійкості. Тому розвиток суто теоретичних досліджень в даному напрямі представляється своєчасним та доречним.

Метою статті є виявлення поступових закономірностей в структурах алгоритмів розділення-демодуляції двох сигналів двійкової ФМ в процесі ускладнення постановки задач на синтез та визначення подальших напрямів досліджень з метою визначення потенційних меж їх завадостійкості.

Виклад основного матеріалу дослідження. В теорії БКД для розділення взаємно неортогональних сигналів двійкової ФМ вже одержана низка алгоритмів розділення двох взаємно неортогональних сигналів двійкової ФМ, взаємопов'язаних постановками задач на синтез. Розглянемо їх по черзі.

1. Сигнали є взаємно синхронними за тактовими точками (канал зв'язку – з постійними параметрами, несівні коливання представлені функціями $s_{1,2}(t)$, інтегрованими з квадратом; (результат опубліковано в [1]).

Модель спостереження:

$$y_t = (-1)^{r_1} s_1(t) + (-1)^{r_2} s_2(t) + n(t); \quad r_1, r_2 \in \{0,1\}; \ t \in [t_{k-1}, t_k).$$

В моделі спостереження $n(t)$ – адитивний білий гаусівський шум (АБГШ) з односторонньою спектральною щільністю потужності N_0; $r_{1,2}$ – дискретні інформаційні параметри (ДП) сигналу і завади, що передбачаються взаємно неортогональними (характеризуються взаємною енергією на довжині інформаційного тактового інтервалу, відмінною від нуля). Далі:

$$p(r_1, r_2 / y_t) = \frac{p_1 p_2 \exp B(r_1, r_2 / y_t)}{\sum_{r_1'=0}^{1} \sum_{r_2'=0}^{1} p_1 p_2 \exp B(r_1', r_2' / y_t)},$$

апостеріорні імовірності станів групового ДП $r_\Gamma = (r_1, r_2)$ формально утвореного дискретними параметрами r_1, r_2 сигнала і завади. В [1] застосоване припущення про апріорну рівноімовірність станів ДП r_1, r_2:

$$p_{1,2} \triangleq p_{1,2}(r_{1,2} = 0) = p_{1,2}(r_{1,2} = 1) = 0,5,$$

та про точне знання неінформаційних параметрів несівних коливань $s_{1,2}(t)$.

Відповідно, інтеграл від сигнальної функції на довжині інформаційного тактового інтервалу:

$$B(r_1,r_2/y_t) = -\frac{1}{N_0}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left[y_t-(-1)^{r_1}s_1(t)-(-1)^{r_2}s_2(t)\right]dt \sim$$

$$\sim \frac{1}{N_0}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left[2y_t(-1)^{r_1}s_1(t)+2y_t(-1)^{r_2}s_2(t)-(-1)^{r_1+r_2}s_1(t)s_2(t)\right]dt.$$

З урахуванням позначень

$$h_{1,2}^2 \triangleq \frac{1}{N_0}\int_{t_{k-1}}^{t_k}s_{1,2}^2(t)dt;\ b_{1,2} = \frac{2}{N_0}\int_{t_{k-1}}^{t_k}y_t s_1(t)dt;\ R = \frac{1}{N_0}\int_{t_{k-1}}^{t_k}s_1(t)s_2(t)dt,$$

маємо:

$$B(r_1,r_2/y_t) = (-1)^{r_1}b_1+(-1)^{r_2}b_2-(-1)^{r_1+r_2}R.$$

Тут і далі $h_1^2,\ h_2^2$ спростовані, як однакові для всіх апостеріорних імовірностей $p(r_1,r_2/y_t)$.

Апостеріорні імовірності станів r_1 ДП корисного сигналу:

$$p(r_1=0/y_t) = p(r_1=0,r_2=0/y_t)+p(r_1=0,r_2=1/y_t);$$

$$p(r_1=1/y_t) = p(r_1=1,r_2=0/y_t)+p(r_1=1,r_2=1/y_t).$$

Відповідне правило прийняття рішень (ППР):

$$r_1^* = rect\left[p(r_1=1/y_t)-p(r_1=0/y_t)\right];$$

де $rect(x\geq 0)=1;\ rect(x<0)=0.$

Конкретизуючи вищезазначений вираз для аргументу ППР, одержуємо (при цьому використовуємо операції, що не впливають на його знак):

$$p(r_1=0/y_t)-p(r_1=1/y_t) \sim \exp(b_1-2R+b_2)+\exp(b_1+2R-b_2)-$$

$$-\exp(-b_1+2R+b_2)-\exp(-b_1-2R-b_2) = \exp b_1\left[\exp(-2R+b_2)+\exp(2R-b_2)\right]-$$

$$-\exp(-b_1)\left[\exp(2R+b_2)+\exp(-2R-b_2)\right] \sim \exp b_1 ch(2R-b_2)-\exp(-b_1)ch(2R+b_2) \sim$$

$$\sim \exp b_1(ch2Rchb_2-sh2Rshb_2)-\exp(-b_1)(ch2Rchb_2+sh2Rshb_2) \sim$$

$$\sim shb_1ch2Rchb_2-chb_1sh2Rshb_2 \sim (\textit{поділимо на невідємний вираз } chb_1ch2Rchb_2) \sim$$

$$\sim thb_1-th2Rthb_2 \Rightarrow -b_1+Arth(thb_2th2R).$$

Остаточно маємо:

$$r_1^* = rect\left[-b_1+Arth(thb_2th2R)\right]. \qquad (1)$$

2. Сигнали є взаємно синхронними за тактовими точками, другий сигнал, що заважає – переривчастий (результат опублікований в [3]).

Модель спостереження:

$$y_t = (-1)^{r_1}s_1(t)+\left[(-1)^{r_2}+r_2\frac{1-r_2}{2}\right]s_2(t)+n(t);\quad r_1\in\{0,1\};\ r_2\in\{0,1,2\};\ t\in[t_{k-1},t_k).$$

$$P_в = p(r_2=0)+p(r_2=1);\ p(r_2=0) = p(r_2=1) = P_в/2.$$

Інтеграл від сигнальної функції:

$$B(r_1,r_2/y_t) = \frac{1}{N_0}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left\{2y_t-(-1)^{r_1}s_1(t)-\left[(-1)^{r_2}+r_2\frac{1-r_2}{2}\right]s_2(t)\right\}\times$$

$$\times\left\{(-1)^{r_1} s_1(t)+\left[(-1)^{r_2}+r_2\frac{1-r_2}{2}\right]s_2(t)\right\}dt=(-1)^{r_1} b_1+\left[(-1)^{r_2}+r_2\frac{1-r_2}{2}\right]b_2-$$

$$-(-1)^{r_1}\left[(-1)^{r_2}+r_2\frac{1-r_2}{2}\right]R-\left[(-1)^{r_2}+r_2\frac{1-r_2}{2}\right]^2 h_2^2.$$

Тут застосовані введені вище позначення.

Далі, апостеріорні імовірності станів r_1 ДП корисного сигналу:

$$p(r_1=0/y_t)=p(r_1=0,r_2=0/y_t)+p(r_1=0,r_2=1/y_t)+p(r_1=0,r_2=2/y_t);$$

$$p(r_1=1/y_t)=p(r_1=1,r_2=0/y_t)+p(r_1=1,r_2=1/y_t)+p(r_1=1,r_2=2/y_t);$$

Конкретизуючи згідно вищенаведених позначень, маємо:

$$p(r_1=1/y_t)\sim\frac{P_в}{2}\left[\exp\left(-b_1+b_2+2R-h_2^2\right)+\exp\left(-b_1-b_2-2R-h_2^2\right)\right]+(1-P_в)\exp(-b_1);$$

$$p(r_1=0/y_t)\sim\frac{P_в}{2}\left[\exp\left(b_1+b_2-2R-h_2^2\right)+\exp\left(b_1-b_2+2R-h_2^2\right)\right]+(1-P_в)\exp b_1.$$

Відповідно, аргумент ППР можна привести до виду:

$$p(r_1=1/y_t)-p(r_1=0/y_t)\sim\frac{P_в}{2}\exp(-b_1)\left[\exp\left(b_2+2R-h_2^2\right)+\exp\left(-b_2-2R-h_2^2\right)\right]+$$

$$+(1-P_в)\exp(-b_1)-\frac{P_в}{2}\exp b_1\left[\exp\left(b_2-2R-h_2^2\right)+\exp\left(-b_2+2R-h_2^2\right)\right]-(1-P_в)\exp b_1\sim$$

$$\sim P_в\exp\left(-b_1-h_2^2\right)ch(b_2+2R)+(1-P_в)\exp(-b_1)-P_в\exp b_1\exp\left(-h_2^2\right)ch(b_2-2R)-$$

$$-(1-P_в)\exp b_1\sim\exp(-b_1)\left[\exp\left(-h_2^2\right)P_в\left(chb_2ch2R+shb_2sh2R\right)+1-P_в\right]-$$

$$-\exp b_1\left[\exp\left(-h_2^2\right)P_в\left(chb_2ch2R-shb_2sh2R\right)+1-P_в\right]\sim$$

$$\sim -shb_1\left[\exp\left(-h_2^2\right)P_вchb_2ch2R+1-P_в\right]+chb_1\exp\left(-h_2^2\right)P_вshb_2sh2R\sim$$

$$\sim\left(\textit{поділимо на невід'ємний вираз}\exp\left(-h_2^2\right)chb_1chb_2ch2R\right)\sim$$

$$\sim -thb_1\left[P_в+\frac{1-P_в}{\exp\left(-h_2^2\right)chb_2ch2R}\right]+P_вthb_2th2R\sim$$

$$\sim\left(\textit{поділимо на невід'ємний вираз}\,\frac{P_в\exp\left(-h_2^2\right)chb_2ch2R+1-P_в}{\exp\left(-h_2^2\right)chb_2ch2R}\right)\sim$$

$$\sim -thb_1+\frac{P_вthb_2th2Rchb_2ch2R\exp\left(-h_2^2\right)}{P_в\exp\left(-h_2^2\right)chb_2ch2R+1-P_в}\sim$$

$\sim$ (*поділимо чисельник і знаменник правої частини на невід'ємний вираз*

$$\exp\left(-h_2^2\right)chb_2ch2R)\Rightarrow -thb_1+thb_2th2R\frac{P_в}{P_в+(1-P_в)\sqrt{\left(1-th^2b_2\right)\left(1-th^2 2R\right)\exp 2h_2^2}}.$$

Тут застосоване співвідношення $chx=\dfrac{1}{\sqrt{1-th^2x}}$. В результаті ППР отримує вид:

$$r_1^*=rect\left\{-b_1+Arth\left[K(b_2)thb_2th2R\right]\right\}, \tag{2}$$

де $$K(b_2)=\frac{p_в}{p_в+(1-p_в)\sqrt{\left(1-th^2b_2\right)\left(1-th^2 2R\right)\exp 2h_2^2}}.$$

При $P_в \equiv 1$ ППР (2) вироджується в ППР (1), а при $P_в \equiv 0$ співвідношення (1) і (2) відповідають класичному когерентному прийому сигналу двійкової ФМ.

3. Сигнали є взаємно асинхронними за тактовими точками (результат опубліковано в [10]).

Модель спостереження:

$$y_t = (-1)^{r_1} s_1\left[t \in \left[t_{k-1}, t_k\right)\right] + (-1)^{r_{21}} s_2\left[t \in \left[t_{k-2}+\tau, t_{k-1}+\tau\right)\right] +$$
$$+(-1)^{r_{22}} s_2\left[t \in \left[t_{k-1}+\tau, t_k+\tau\right)\right] + n(t);$$
$$r_1, r_{21}, r_{22} \in \{0,1\}.$$
$$p(r_1=0)=p(r_{21}=0)=p(r_{22}=0)=p(r_1=1)=p(r_{21}=1)=p(r_{22}=1)=0,5.$$

Апостеріорні імовірності станів групового ДП $r_Г = (r_1, r_{12}, r_{22})$:

$$p(r_1, r_{21}, r_{22} / y_t) = \frac{\exp B(r_1, r_{21}, r_{22} / y_t)}{\sum_{r_1'=0}^{1}\sum_{r_{21}'=0}^{1}\sum_{r_{22}'=0}^{1} \exp B\left(r_1', r_{21}', r_{22}' / y_t\right)};$$

Відповідний інтеграл від сигнальної функції:

$$B(r_1, r_{21}, r_{22} / y_t) = \frac{1}{N_0}\int_{t_{k-2}+\tau}^{t_k+\tau}\left[y_t - (-1)^{r_1} s_1(t) - (-1)^{r_{21}} s_2(t) - (-1)^{r_{22}} s_2(t)\right]^2 dt \sim$$
$$\sim \left(\textit{складові } y_t^2, h_1^2, h_{21}^2, h_{22}^2 \textit{ як такі, що однакові для всіх } B(r_1, r_{21}, r_{22} / y_t)\right.$$
$$\left.\textit{надалі спростуємо}\right) \sim \frac{1}{N_0}\int_{t_{k-2}+\tau}^{t_k+\tau}\Big[2y_t\left((-1)^{r_1} s_1(t) + (-1)^{r_{21}} s_2(t) + (-1)^{r_{22}} s_2(t)\right. -$$
$$-(-1)^{r_1} s_1(t)\left((-1)^{r_{21}} s_2(t) + (-1)^{r_{22}} s_2(t)\right)\Big]^2 dt.$$

Конкретизуємо вищезазначені позначення:

$$b_1 = \frac{2}{N_0}\int_{t_{k-1}}^{t_k} y_t s_1(t)dt;\ b_{21} = \frac{2}{N_0}\int_{t_{k-2}+\tau}^{t_{k-1}+\tau} y_t s_2(t)dt;\ b_{22} = \frac{2}{N_0}\int_{t_{k-1}+\tau}^{t_k+\tau} y_t s_2(t)dt;$$
$$R_{12} = \frac{1}{N_0}\int_{t_{k-1}}^{t_{k-1}+\tau} s_1(t)s_2(t)dt;\ R_{13} = \frac{1}{N_0}\int_{t_{k-1}+\tau}^{t_k} s_1(t)s_2(t)dt;$$
$$h_1^2 = h_{11}^2 + h_{12}^2 = \frac{1}{N_0}\int_{t_{k-1}}^{t_{k-1}+\tau} s_1^2(t)dt + \frac{1}{N_0}\int_{t_{k-1}+\tau}^{t_k} s_1^2(t)dt = \frac{1}{N_0}\int_{t_{k-1}}^{t_k} s_1^2(t)dt;$$
$$h_2^2 = h_{21}^2 + h_{22}^2 = \frac{1}{N_0}\int_{t_{k-1}}^{t_{k-1}+\tau} s_2^2(t)dt + \frac{1}{N_0}\int_{t_{k-1}+\tau}^{t_k} s_2^2(t)dt;$$
$$R_{12} = \rho\sqrt{h_{11}^2 h_{21}^2};\ R_{13} = \rho\sqrt{h_{12}^2 h_{22}^2};\quad \rho = \frac{R_{12}}{\sqrt{h_{11}^2 h_{21}^2}} = \frac{R_{13}}{\sqrt{h_{12}^2 h_{22}^2}} \in [0,1].$$

В результаті:

$$B(r_1, r_{21}, r_{22} / y_t) = (-1)^{r_1} b_1 + (-1)^{r_{21}} b_{21} + (-1)^{r_{22}} b_{22} - 2(-1)^{r_1+r_{21}} R_{12} - 2(-1)^{r_1+r_{22}} R_{13}.$$

Тепер запишемо апостеріорні імовірності станів ДП r_1 корисного ЦС у загальному виді:

$$p(r_1=1/y_t) = p(r_1=1, r_{21}=0, r_{22}=0/y_t) + p(r_1=1, r_{21}=0, r_{22}=1/y_t) +$$
$$+p(r_1=1, r_{21}=1, r_{22}=0/y_t) + p(r_1=1, r_{21}=1, r_{22}=1/y_t);$$
$$p(r_1=0/y_t) = p(r_1=0, r_{21}=0, r_{22}=0/y_t) + p(r_1=0, r_{21}=0, r_{22}=1/y_t) +$$
$$+p(r_1=0, r_{21}=1, r_{22}=0/y_t) + p(r_1=0, r_{21}=1, r_{22}=1/y_t).$$

Конкретизуючи, маємо:

$$p\left(r_1=1/y_t\right)\sim \exp\left(-b_1+b_{21}+b_{22}+2R_{12}+2R_{13}\right)+\exp\left(-b_1+b_{21}-b_{22}+2R_{12}-2R_{13}\right)+$$
$$+\exp\left(-b_1-b_{21}+b_{22}-2R_{12}+2R_{13}\right)+\exp\left(-b_1-b_{21}-b_{22}-2R_{12}-2R_{13}\right);$$
$$p\left(r_1=0/y_t\right)\sim \exp\left(b_1+b_{21}+b_{22}-2R_{12}-2R_{13}\right)+\exp\left(b_1+b_{21}-b_{22}-2R_{12}+2R_{13}\right)+$$
$$+\exp\left(b_1-b_{21}+b_{22}+2R_{12}-2R_{13}\right)+\exp\left(b_1-b_{21}-b_{22}+2R_{12}+2R_{13}\right);$$

Далі, аргумент ППР r_1^* про стан ДП r_1 першого корисного сигналу можна перетворити до виду:

$$p\left(r_1=1/y_t\right)-p\left(r_1=0/y_t\right)=$$
$$=\exp\left(-b_1\right)(shshshsh+2shchshch+chshchsh+chchchch)-$$
$$-\exp b_1(chchchch+shshshsh-shchshch-chshshch-chshchsh)\sim$$
$$\sim -shb_1\left(chchchch+shshshsh\right)+chb_1\left(shchshch+chshchsh\right)\sim$$
$$\sim\left(\text{поділимо на невід'ємний вираз } chb_1chb_{21}chb_{22}ch2R_{12}ch2R_{13}\right)\sim$$
$$\sim -thb_1\left(1+thb_{21}thb_{22}th2R_{12}th2R_{13}\right)+thb_{21}th2R_{12}+thb_{22}th2R_{13}\sim$$
$$\sim\left(\text{тепер поділимо на невід'ємний вираз } 1+thb_{21}thb_{22}th2R_{12}th2R_{13}\right)\sim$$
$$\sim -thb_1+\frac{thb_{21}th2R_{12}+thb_{22}th2R_{13}}{1+thb_{21}thb_{22}th2R_{12}th2R_{13}}\sim -b_1+Arth\frac{thb_{21}th2R_{12}+thb_{22}th2R_{13}}{1+thb_{21}thb_{22}th2R_{12}th2R_{13}}\sim$$
$$\sim -b_1+Arth\frac{th\left[Arth\left(thb_{21}th2R_{12}\right)\right]+th\left[Arth\left(thb_{22}th2R_{13}\right)\right]}{1+th\left[Arth\left(thb_{21}th2R_{12}\right)\right]+th\left[Arth\left(thb_{22}th2R_{13}\right)\right]}=$$
$$=-b_1+Arth\left(thb_{21}th2R_{12}\right)+Arth\left(thb_{22}th2R_{13}\right).$$

Відповідне ППР:

$$r_1^*=rect\left[-b_1+Arth\left(thb_{21}th2R_{12}\right)+Arth\left(thb_{22}th2R_{13}\right)\right]. \qquad (3)$$

За умови $R_{12}=0$ або $R_{13}=0$ одержуємо ППР (1). Тобто, ППР (3) є узагальненням ППР (1).

4. Сигнали є взаємно асинхронними за тактовими точками, другий сигнал – переривчастий (результат опублікований в [11]).

Модель спостереження:

$$y_t=\left(-1\right)^{r_1}s_1\left[t\in\left[t_{k-1},t_k\right)\right]+\left[\left(-1\right)^{r_{21}}+r_{21}\frac{1-r_{21}}{2}\right]s_2\left[t\in\left[t_{k-2}+\tau,t_{k-1}+\tau\right)\right]+$$
$$+\left[\left(-1\right)^{r_{22}}+r_{22}\frac{1-r_{22}}{2}\right]s_2\left[t\in\left[t_{k-1}+\tau,t_k+\tau\right)\right]+n\left(t\right);$$
$$r_1\in\left\{0,1\right\},\quad r_{21,22}\in\left\{0,1,2\right\},\quad t\in\left[t_{k-2}+\tau,t_k+\tau\right);$$
$$p\left(r_1=0\right)=p\left(r_1=1\right)=0,5;\ p\left(r_{21,22}=0\right)=p\left(r_{21,22}=1\right)=\frac{P_в}{2};\ p\left(r_{21,22}=2\right)=1-P_в.$$
$$r_Г=\left(r_1^k,r_2^{k-1}=r_{21};r_2^k=r_{22}\right)\in\left\{0,1,...,17\right\}.$$

Тут інтеграл від сигнальної функції:

$$B\left(r_Г/y_t\right)=B\left(r_1^k,r_2^{k-1},r_2^k/y_t\right)=B\left(r_1,r_{21},r_{22}/y_t\right)=-\frac{1}{N_0}\int_{t_{k-2}+\tau}^{t_k+\tau}\Big\{y_t-\left(-1\right)^{r_1}s_1\left[t\in\left[t_{k-1},t_k\right)\right]-$$
$$-\left[\left(-1\right)^{r_{21}}+r_{21}\frac{1-r_{21}}{2}\right]s_2\left[t\in\left[t_{k-2}+\tau,t_{k-1}+\tau\right)\right]-\left[\left(-1\right)^{r_{22}}+r_{22}\frac{1-r_{22}}{2}\right]s_2\left[t\in\left[t_{k-1}+\tau,t_k+\tau\right)\right]\Big\}^2dt.$$

Далі використаємо позначення, введені в прикладі 3. При цьому нехтувати величинами h_{21}^2, h_{22}^2 тут не можна – другий сигнал, що заважає – переривчастий. Водночас складова $h_1^2 = \frac{1}{N_0} \int_{t_{k-1}}^{t_k} s_2^2(t)\,dt$ присутня у всіх показниках ступеня у виразі для апостеріорних імовірностей $B(r_1, r_{21}, r_{22} / y_t)$, і нею тут можна знехтувати.

Для цього прикладу інтеграл від сигнальної функції:

$$B(r_1, r_{21}, r_{22} / y_t) = \frac{1}{N_0} \int_{t_{k-2}+\tau}^{t_k+\tau} \Big\{ 2y_t \Big[(-1)^{r_1} s_1\big(t \in [t_{k-1}, t_k)\big) +$$

$$+\left[(-1)^{r_{21}} + r_{21}\frac{1-r_{21}}{2}\right] s_2\big(t \in [t_{k-2}+\tau, t_{k-1}+\tau)\big) + \left[(-1)^{r_{22}} + r_{22}\frac{1-r_{22}}{2}\right] s_2\big(t \in [t_{k-1}+\tau, t_k+\tau)\big) -$$

$$-2(-1)^{r_1} s_1(t)\left[\left[(-1)^{r_{21}} + r_{21}\frac{1-r_{21}}{2}\right] s_2\big(t \in [t_{k-1}, t_{k-1}+\tau)\big) + \left[(-1)^{r_{22}} + r_{22}\frac{1-r_{22}}{2}\right] s_2\big(t \in [t_{k-1}+\tau, t_k)\big)\right] -$$

$$-\left[(-1)^{r_{21}} + r_{21}\frac{1-r_{21}}{2}\right] s_2^2\big[t \in [t_{k-1}, t_{k-1}+\tau)\big] - \left[(-1)^{r_{21}} + r_{21}\frac{1-r_{21}}{2}\right] s_2^2\big[t \in [t_{k-1}, t_{k-1}+\tau)\big] -$$

$$-\left[(-1)^{r_{22}} + r_{22}\frac{1-r_{22}}{2}\right] s_2^2\big[t \in [t_{k-1}+\tau, t_k)\big] \Big\} dt =$$

$$= (-1)^{r_1} b_1 + \left[(-1)^{r_{21}} + r_{21}\frac{1-r_{21}}{2}\right] b_{21} + \left[(-1)^{r_{22}} + r_{22}\frac{1-r_{22}}{2}\right] b_{22} -$$

$$-2(-1)^{r_1}\left[(-1)^{r_{21}} + r_{21}\frac{1-r_{21}}{2}\right] R_{12} - 2(-1)^{r_1}\left[(-1)^{r_{22}} + r_{22}\frac{1-r_{22}}{2}\right] R_{13} -$$

$$-\left[(-1)^{r_{21}} + r_{21}\frac{1-r_{21}}{2}\right] h_{21}^2 - \left[(-1)^{r_{22}} + r_{22}\frac{1-r_{22}}{2}\right] h_{22}^2.$$

Введемо позначення, що скорочують записи:

$$\varphi_1(r_1) = (-1)^{r_1} \in \{-1, 1\};\ \ \varphi_2(r_{21,22}) = \left[(-1)^{r_{21,22}} + r_{21,22}\frac{1-r_{21,22}}{2}\right] \in \{-1, 1, 0\}.$$

Тоді

$$B(r_1, r_{21}, r_{22} / y_t) = \varphi_1(r_1) b_1 + \varphi_2(r_{21}) b_{21} + \varphi_2(r_{22}) b_{22} -$$

$$-2\varphi_1(r_1)\varphi_2(r_{21}) R_{12} - 2\varphi_1(r_1)\varphi_2(r_{22}) R_{13} - \varphi_2^2(r_{21}) h_{21}^2 - \varphi_2^2(r_{22}) h_{22}^2.$$

Відповідно, апостеріорні імовірності станів групового ДП $r_Г = (r_1, r_{21}, r_{22})$:

$$p(r_Г / y_t) = \frac{P_в^2}{8Z}\exp B\left(r_Г : r_1, r_{21}, r_{22} = \overline{0,1} / y_t\right) + \frac{P_в(1-P_в)}{4Z}\exp B\left(r_Г : r_1, r_{21} = \overline{0,1}; r_{22} = 2 / y_t\right) +$$

$$+\frac{P_в(1-P_в)}{4Z}\exp B\left(r_Г : r_1, r_{22} = \overline{0,1}; r_{21} = 2 / y_t\right) + \frac{(1-P_в)^2}{2Z}\exp B\left(r_Г : r_1 = \overline{0,1}, r_{21}, r_{22} = 2 / y_t\right).$$

Тут Z – знаменник, однаковий для всіх $p(r_Г / y_t)$:

$$Z = \frac{P_в^2}{8Z}\sum_{r_1=0}^{1}\sum_{r_{21}=0}^{1}\sum_{r_{22}=0}^{1}\exp B(r_Г / y_t) + \frac{P_в(1-P_в)}{4Z}\sum_{r_1=0}^{1}\sum_{r_{21}=0}^{1}\exp B(r_Г : r_{22} = 2 / y_t) +$$

$$+\frac{P_в(1-P_в)}{4Z}\sum_{r_1=0}^{1}\sum_{r_{22}=0}^{1}\exp B(r_Г : r_{21} = 2 / y_t) + \frac{(1-P_в)^2}{2Z}\sum_{r_1=0}^{1}\exp B(r_Г : r_{21}, r_{22} = 2 / y_t).$$

Надалі його спростуємо, як невід'ємний.

Сформуємо апостеріорні імовірності (функціонали правдоподібності) станів ДП r_1 першого сигналу:

$$p\left(r_1=0/y_t\right)\sim\frac{P_в^2}{8}\sum_{r_{21}=0}^{1}\sum_{r_{22}=0}^{1}\exp B\left(r_Г:r_1=0/y_t\right)+\frac{P_в\left(1-P_в\right)}{4}\left[\sum_{r_{21}=0}^{1}\exp B\left(r_Г:r_1=0;r_{22}=2/y_t\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{r_{22}=0}^{1}\exp B\left(r_Г:r_1=0;r_{21}=2/y_t\right)\right]+\frac{\left(1-P_в\right)^2}{2}\exp B\left(r_Г:r_1=0;r_{21,22}=2/y_t\right);$$

$$p\left(r_1=1/y_t\right)\sim\frac{P_в^2}{8}\sum_{r_{21}=0}^{1}\sum_{r_{22}=0}^{1}\exp B\left(r_Г:r_1=1/y_t\right)+\frac{P_в\left(1-P_в\right)}{4}\left[\sum_{r_{21}=0}^{1}\exp B\left(r_Г:r_1=1;r_{22}=2/y_t\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{r_{22}=0}^{1}\exp B\left(r_Г:r_1=1;r_{21}=2/y_t\right)\right]+\frac{\left(1-P_в\right)^2}{2}\exp B\left(r_Г:r_1=1;r_{21,22}=2/y_t\right).$$

ППР для двійкового ДП корисного ЦС має відомий вид (див. попередні приклади):

$$r_1^*=rect\left[p\left(r_1=1/y_t\right)-p\left(r_1=0/y_t\right)\right].$$

Тепер одержимо аргумент ППР в явному виді:

$$P(r_1=1/y_t)-P(r_1=0/y_t)\sim\frac{P_в^2}{8}\left\{\exp(-b_1)\left[\exp(b_{21}+b_{22}-2R_{12}-2R_{13}-h_{21}^2-h_{22}^2)+\right.\right.$$

$$+\exp(b_{21}-b_{22}-2R_{12}+2R_{13}-h_{21}^2-h_{22}^2)+\exp(-b_{21}+b_{22}+2R_{12}-2R_{13}-h_{21}^2-h_{22}^2)+$$

$$\left.+\exp(-b_{21}-b_{22}+2R_{12}+2R_{13}-h_{21}^2-h_{22}^2)\right]-\exp b_1\left[\exp(b_{21}+b_{22}+2R_{12}+2R_{13}-h_{21}^2-h_{22}^2)+\right.$$

$$+\exp(b_{12}-b_{22}+2R_{12}-2R_{13}-h_{21}^2-h_{22}^2)+\exp(-b_{12}+b_{22}-2R_{12}+2R_{13}-h_{21}^2-h_{22}^2)+$$

$$\left.\left.+\exp(-b_{21}-b_{22}-2R_{12}-2R_{13}-h_{21}^2-h_{22}^2)\right]\right\}+\frac{P_в^2(1-P_в^2)}{4}\left\{\exp(-b_1)\left[\exp(b_{21}-2R_{12}-h_{21}^2)+\right.\right.$$

$$\left.+\exp(-b_{21}+2R_{12}-h_{21}^2)+\exp(b_{22}-2R_{13}-h_{22}^2)+\exp(-b_{22}+2R_{13}-h_{22}^2)\right]-$$

$$-\exp b_1\left[\exp(b_{21}+2R_{12}-h_{21}^2)+\exp(-b_{21}-2R_{12}-h_{21}^2)+\exp(b_{22}-2R_{13}-h_{22}^2)+\right.$$

$$\left.\left.+\exp(-b_{22}-2R_{13}-h_{22}^2)\right]\right\}+\frac{(1-P_в^2)^2}{2}\left[\exp(-b_1)-\exp b_1\right];$$

Після еквівалентних перетворень, що не впливають на знак аргументу ППР, маємо:

$$P(r_1=1/y_t)-P(r_1=0/y_t)\sim-shb_1\left[P_в^2\,(chb_{21}chb_{22}ch2R_{12}ch2R_{13}+\right.$$

$$+shb_{21}shb_{22}sh2R_{12}sh2R_{13})\exp(-h_2^2)+P_в(1-P_в)(chb_{21}ch2R_{12}\exp(-h_{21}^2)+$$

$$\left.+chb_{22}ch2R_{13}\exp(-h_{22}^2)+(1-P_в)^2)\right]+chb_1\left[P_в^2\,(shb_{21}chb_{22}sh2R_{12}ch2R_{13}+\right.$$

$$+chb_{21}shb_{22}ch2R_{12}sh2R_{13})\exp(-h_2^2)+P_в(1-P_в)(shb_{21}sh2R_{12}\exp(-h_{21}^2)+$$

$$\left.+shb_{22}sh2R_{13}\exp(-h_{22}^2))\right]\sim-b_1+Arth\left\{\left[P_в^2\,(shb_{21}chb_{22}sh2R_{12}ch2R_{13}+\right.\right.$$

$$+chb_{21}shb_{22}ch2R_{12}sh2R_{13})\exp(-h_2^2)+P_в(1-P_в)(shb_{21}sh2R_{12}\exp(-h_{21}^2)+$$

$$\left.+shb_{22}sh2R_{13}\exp(-h_{22}^2)\right]/\left[P_в^2\,(chb_{21}chb_{22}sh2R_{12}ch2R_{13}+\right.$$

$$+shb_{21}shb_{22}sh2R_{12}sh2R_{13})\exp(-h_2^2)+P_в(1-P_в)(chb_{21}ch2R_{12}\exp(-h_{21}^2)+$$

$$\left.\left.+chb_{22}ch2R_{13}\exp(-h_{22}^2))+(1-P_в)^2\right]\right\}.$$

Поділимо чисельник і знаменник аргументу функції $Arth(.)$ на невід’ємний вираз:

$$P_в^2chb_{21}chb_{22}ch2R_{12}ch2R_{13}\exp(-h_2^2)+P_в(1-P_в)(chb_{21}ch2R_{12}\exp(-h_{21}^2)+chb_{22}ch2R_{13}\exp(-h_{22}^2)+(1-P_в)^2.$$

Попередньо чисельник чисельника перекомпоновуємо в дві складові:

$$P_вshb_{21}sh2R_{12}\exp(-h_{21}^2)\left[P_вchb_{22}ch2R_{13}\exp(-h_{22}^2)+1-P_в\right]+$$

$$+P_в shb_{22} sh2R_{13}\exp(-h_{22}^2)\left[P_в chb_{21} ch2R_{12}\exp(-h_{21}^2)+1-P_в\right].$$

Відповідно, знаменник чисельника представимо двічі:

– або у виді (перший варіант):

$$P_в chb_{21}ch2R_{12}\exp(-h_{21}^2)[P_в chb_{22}ch2R_{13}\exp(-h_{22}^2)+(1-P_в)]+P_в chb_{22}ch2R_{13}\exp(-h_{22}^2)(1-P_в)+(1-P_в)^2;$$

– або у виді (другий варіант):

$$P_в chb_{22}ch2R_{13}\exp(-h_{22}^2)[P_в chb_{21}ch2R_{12}\exp(-h_{21}^2)+(1-P_в)]+P_в chb_{21}ch2R_{12}\exp(-h_{21}^2)(1-P_в)+(1-P_в)^2.$$

Дві складові чисельника аргументу функції $Arth(.)$ перетворимо окремо.

Першу частину чисельника поділимо на перший варіант представлення знаменника:

$$\frac{P_в shb_{21}sh2R_{12}\exp(-h_{21}^2)\left[P_в chb_{22}ch2R_{13}\exp(-h_{22}^2)+1-P_в\right]}{P_в chb_{21}ch2R_{12}\exp(-h_{21}^2)\left[P_в chb_{22}ch2R_{13}\exp(-h_{22}^2)+1-P_в\right]+P_в chb_{22}ch2R_{13}\exp(-h_{22}^2)(1-P_в)+(1-P_в)^2}.$$

Далі поділимо чисельник і знаменник першої частини загального чисельника на $P_в chb_{22}ch2R_{13}\exp(-h_{22}^2)+(1-P_в)>0$:

$$\frac{P_в shb_{21}sh2R_{12}\exp(-h_{21}^2)}{P_в chb_{21}ch2R_{12}\exp(-h_{21}^2)+\dfrac{\left[P_в chb_{22}ch2R_{13}\exp(-h_{22}^2)+1-P_в\right](1-P_в)}{\left[P_в chb_{22}ch2R_{13}\exp(-h_{22}^2)+1-P_в\right]}}=$$

$$=\frac{P_в shb_{21}sh2R_{12}\exp(-h_{21}^2)}{P_в chb_{21}ch2R_{12}\exp(-h_{21}^2)+(1-P_в)}.$$

Тепер ділимо чисельник і знаменник одержаного виразу на $chb_{21}ch2R_{12}\exp(-h_{21}^2)>0$:

$$thb_{21}th2R_{12}\frac{P_в}{P_в+(1-P_в)\sqrt{(1-thb_{21}^2)(1-th2R_{12})\exp 2h_{21}^2}}.$$

Другу складову загального чисельника поділимо на другий варіант знаменника:

$$\frac{P_в shb_{22}sh2R_{13}\exp(-h_{22}^2)\left[P_в chb_{21}ch2R_{12}\exp(-h_{21}^2)+1-P_в\right]}{P_в chb_{22}ch2R_{13}\exp(-h_{22}^2)+\left[P_в chb_{21}ch2R_{12}\exp(-h_{21}^2)+1-P_в\right]+P_в chb_{21}ch2R_{12}\exp(-h_{21}^2)(1-P_в)+(1-P_в)^2}.$$

Поділимо тепер чисельник і знаменник одержаного виразу на $P_в chb_{21}ch2R_{12}\exp(-h_{21}^2)+(1-P_в)>0$:

$$\frac{P_в shb_{22}sh2R_{13}\exp(-h_{22}^2)}{P_в chb_{22}ch2R_{13}\exp(-h_{22}^2)+\dfrac{\left[P_в chb_{21}ch2R_{12}\exp(-h_{21}^2)+1-P_в\right](1-P_в)}{\left[P_в chb_{21}ch2R_{12}\exp(-h_{21}^2)+(1-P_в)\right]}}=$$

$$=\frac{P_в shb_{22}sh2R_{13}\exp(-h_{22}^2)}{P_в chb_{22}ch2R_{13}\exp(-h_{22}^2)+(1-P_в)}.$$

Тепер поділимо чисельник та знаменник цього виразу на $chb_{22}ch2R_{13}\exp(-h_{22}^2)>0$:

$$thb_{22}th2R_{13}\frac{P_в}{P_в+(1-P_в)\sqrt{(1-thb_{22}^2)(1-th2R_{13})\exp 2h_{22}^2}}.$$

В результаті чисельник аргументу ППР має вигляд:

$$thb_{21}th2R_{12}\frac{P_в}{P_в+(1-P_в)\sqrt{(1-thb_{21}^2)(1-th2R_{12})\exp 2h_{21}^2}}+$$

$$+thb_{22}th2R_{13}\frac{P_в}{P_в+(1-P_в)\sqrt{(1-thb_{22}^2)(1-th2R_{13})\exp 2h_{22}^2}}.$$

Продовжимо підготовку до застосування формули $Arth\dfrac{x+y}{1+xy}=Arthx+Arthy$.

Поділимо знаменник правої частини аргумента ППР під $Arth(.)$ на той же вираз, що і чисельник:

$$\Big\{P_в^2(chb_{21}chb_{22}ch2R_{12}ch2R_{13}+shb_{21}shb_{22}sh2R_{12}sh2R_{13})\exp(-h_2^2)+$$
$$+(1-P_в)\big[P_в\,chb_{21}ch2R_{12}\exp(-h_{21}^2)+P_в chb_{22}ch2R_{13}\exp(-h_{22}^2)+1-P_в\big]\Big\}/$$
$$/\Big\{P_в^2\,chb_{21}chb_{22}ch2R_{12}ch2R_{13}\exp(-h_2^2)+(1-P_в)\big[P_в\,chb_{21}ch2R_{12}\exp(-h_{21}^2)+$$
$$+P_в chb_{22}ch2R_{13}\exp(-h_{22}^2)+1-P_в\big]\Big\}=$$
$$=1+\frac{P_в^2 shb_{21}shb_{22}sh2R_{12}sh2R_{13}\exp(-h_2^2)}{\begin{array}{c}P_в^2 chb_{21}chb_{22}ch2R_{12}ch2R_{13}\exp(-h_2^2)+\\+\big[P_в\,chb_{21}ch2R_{12}\exp(-h_{21}^2)+P_в chb_{22}ch2R_{13}\exp(-h_{22}^2)+1-P_в\big](1-P_в)\end{array}}.$$

Поділимо чисельник і знаменник цього виразу на $chb_{21}ch2R_{12}chb_{22}ch2R_{13}\exp(-h_2^2)>0$:

$$1+\frac{P_в^2 thb_{21}thb_{22}th2R_{12}th2R_{13}}{\begin{array}{c}P_в^2+(1-P_в)\big[P_в\sqrt{(1-th^2b_{22})(1-th^2 2R_{13})\exp 2h_{22}^2}+P_в\sqrt{(1-th^2b_{21})(1-th^2 2R_{12})\exp 2h_{21}^2}+\\+(1-P_в)\sqrt{(1-th^2b_{21})(1-th^2 2R_{12})(1-th^2b_{22})(1-th^2 2R_{13})\exp 2h_2^2}\end{array}}=$$
$$=1+thb_{21}th2R_{12}\frac{P_в}{P_в+(1-P_в)\sqrt{(1-th^2b_{21})(1-th^2 2R_{12})\exp 2h_{21}^2}}\times$$
$$\times thb_{22}th2R_{13}\frac{P_в}{P_в+(1-P_в)\sqrt{(1-th^2b_{22})(1-th^2 2R_{13})\exp 2h_{22}^2}}.$$

В результаті ППР в явному виді:

$$r_1^*=rect\left(-b_1+Arth\frac{\alpha+\beta}{1+\alpha\beta}\right).$$

Тут

$$\alpha=thb_{21}th2R_{12}\frac{P_в}{P_в+(1-P_в)\sqrt{(1-th^2b_{21})(1-th^2 2R_{12})\exp 2h_{21}^2}};$$
$$\beta=thb_{22}th2R_{13}\frac{P_в}{P_в+(1-P_в)\sqrt{(1-th^2b_{22})(1-th^2 2R_{13})\exp 2h_{22}^2}}.$$

Насамкінець

$$r_1^*=rect(-b_1+Arth\left(thb_{21}th2R_{12}\frac{P_в}{P_в+(1-P_в)\sqrt{(1-th^2b_{21})(1-th^2 2R_{12})\exp 2h_{21}^2}}\right)+ \tag{4}$$
$$+Arth\left(thb_{22}th2R_{13}\frac{P_в}{P_в+(1-P_в)\sqrt{(1-th^2b_{22})(1-th^2 2R_{13})\exp 2h_{22}^2}}\right).$$

Одержане ППР (4) є узагальненням ППР (2).

5. Сигнали є взаємно синхронними за тактовими точками, обидва сигнали – перевивчасті (результат опублікований в [12]).

Модель спостереження припускає, що мають місце зіткнення пари сигналів користувачів з двох різних за потужністю груп, представимо у вигляді:

$$y_t=\left[(-1)^{r_1}+r_1(1-r_1)/2\right]s_1(t)+\left[(-1)^{r_2}+r_2(1-r_2)/2\right]s_2(t)+n(t);$$
$$t\in\left[t_{k-1},t_k\right];k=1,2,...;r_i=0,1,2;i=1,2.$$

В припущені статистичної незалежності значень ДП r_1,r_2 і попарної рівноймовірності ЦС, які відповідають наявності випромінювання, тобто

$$p(r_i=0)=p(r_i=1)=\frac{1}{2}(1-p(r_i=2))=\frac{P_в}{2};\ \ i=\overline{1,2};$$

апостеріорні ймовірності значень групового ДП при когерентному прийомі визначаються співвідношеннями

$$P[(r_1=0,1;r_1=0,1)/y_t]=\frac{\frac{1}{4}P_{в1}P_{в2}\exp B(r_1,r_2)}{Z};$$

$$P[(r_1=0,1;r_{3-1}=2)/y_t]=\frac{\frac{1}{2}P_{в1}(1-P_{3-1})\exp B(r_1,r_2)}{Z};$$

$$P[(r_1=r_2=2)/y_t]=\frac{(1-P_{в1})(1-P_{в2})\exp B(r_1,r_2)}{Z}.$$

Тут з урахуванням моделі спостереження і введених раніше позначень

$$Z=\frac{1}{4}\cdot P_{в_1}P_{в_2}\sum_{r_1=0}^{1}\sum_{r_2=0}^{1}\exp B(r_1,r_2)+\frac{1}{2}\cdot P_{в_1}(1-P_{в_2})\sum_{r_1=0}^{1}\exp B(r_1,r_2)+$$
$$+\frac{1}{2}(1-P_{в_1})P_{в_2}\sum_{r_2=0}^{1}\exp B(r_1,r_2)+(1-P_{в_1})(1-P_{в_2})\exp B(r_1,r_2);$$

А інтеграл від відповідної сигнальної функції

$$B(r_1,r_2)=\frac{1}{N_0}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left\{2y_t-[(-1)^{r_1}+r_1(1-r_1)/2]s_1(t)+[(-1)^{r_2}+r_2(1-r_2)/2]s_2(t)\right\}\times$$
$$\times\left\{[(-1)^{(r_1)}+r_1(1-r_1)/2]s_1(t)+[(-1)^{r_2}+r_2(1-r_2)/2]s_2(t)\right\}dt.$$

Апостеріорні імовірності станів корисного ЦС r_1 у загальному виді:

$$p(r_1=0/y_t)=p(r_1=0,r_2=0/y_t)+p(r_1=0,r_2=1/y_t)+p(r_1=0,r_2=2/y_t);$$
$$p(r_1=1/y_t)=p(r_1=1,r_2=0/y_t)+p(r_1=1,r_2=1/y_t)+p(r_1=1,r_2=2/y_t);$$
$$p(r_1=2/y_t)=p(r_1=2,r_2=0/y_t)+p(r_1=2,r_2=1/y_t)+p(r_1=2,r_2=2/y_t)$$

$$B(r_1,r_2)=-\frac{1}{N_0}\int_{t_{k-1}}^{t_k}[y_t-s_1(r_1,t)-s_2(r_2,t)]^2dt\sim$$

$$\sim b_1\varphi(r_1)+b_2\varphi(r_2)-2R\varphi(r_1)\varphi(r_2)-h_1^2\varphi^2(r_1)--h_2^2\varphi^2(r_2);\quad \varphi(r_{1,2})=(-1)^{r_{1,2}}+r_{1,2}\frac{1-r_{1,2}}{2}.$$

Тоді аргументи ППР для ДП r_1:

$$p(r_2=1/y_t)-p(r_2=0/y_t)\sim\frac{P_{в1}P_{в2}}{4}[\exp(-b_1+b_2+2R-h_1^2-h_2^2)+$$
$$+\exp(-b_1-b_2-2R-h_1^2-h_2^2)-\exp(b_1+b_2-2R-h_1^2-h_2^2)+\exp(b_1-b_2+2R-h_1^2-h_2^2)]+$$
$$+\frac{P_{в1}(1-P_{в2})}{2}[\exp(-b_1-h_1^2)-\exp(-b_1-h_1^2)]\sim$$
$$\sim -shb_1P_{в2}\exp(-h_2^2)chb_2ch2R+chb_1P_{в2}\exp(-h_2^2)shb_2sh2R-(1-P_{в2})shb_1\sim$$
$$\sim -b_1+Arth\frac{thb_2th2R\cdot P_{в2}}{P_{в2}+(1-P_{в1})\sqrt{(1-th^2 2R)(1-th^2b_2)\exp 2h_2^2}}=-b_1+\gamma;$$

$$p(r_1=2/y_t)-p(r_1=0/y_t)\sim\frac{(1-P_{в1})P_{в2}}{2}[\exp(b_2-h_1^2)+\exp(-b_2-h_2^2)+$$
$$+(1-P_{в1})(1-P_{в2})]-\frac{P_{в1}-P_{в2}}{4}[\exp(b_1+b_2-2R-h_1^2-h_2^2)+$$
$$+\exp(b_1-b_2-2R-h_1^2-h_2^2)]-\frac{P_{в1}(1-P_{в2})}{2}\exp(b_1-h_1^2)\sim$$

$$\sim -b_1+\ln\left[\frac{(1-P_{в1})(1-P_{в2})+(1-P_{в1})P_{в2}\exp(-h_1^2)chb_2/2}{\frac{P_{в1}P_{в2}}{2}\exp(-h_1^2-h_2^2)(chb_2ch2R-shb_2sh2R)+\frac{P_{в1}(1-P_{в2})}{2}\exp(-h_1^2)}\right]=$$

$$=-b_1+\ln\left[\frac{2(1-P_{в1})(1-P_{в2})\sqrt{(1-th^2b_2)(1-th^2 2R)}+(1-P_{в1})P_{в2}\sqrt{1-th^2 2R}\exp(-h_2^2)}{P_{в1}P_{в2}[1-th^2b_2th^2 2R]\exp(-h_1^2-h_2^2)+P_{в1}(1-P_{в2})\sqrt{(1-th^2b_2)(1-th^2 2R)}\exp(-h_1^2)}\right]=-b_1+\alpha;$$

$$p(r_1=2/y_t)-p(r_1=1/y_t)\sim\frac{(1-P_{в1})P_{в2}}{2}[\exp(b_2-h_2^2)+\exp(-b_2-h_2^2)+$$

$$+(1-P_{в1})(1-P_{в2})]-\frac{P_{в1}P_{в2}}{4}[\exp(-b_1+b_2+2R-h_1^2-h_2^2)+\exp(-b_1-b_2-2R-h_1^2-h_2^2)]-$$

$$-\frac{P_{в1}(1-P_{в2})}{2}\exp(-b_1-h_1^2)\sim$$

$$\sim b_1+\ln\left[\frac{(1-P_{в1})(1-P_{в2})+(1-P_{в1})P_{в2}\exp(-h_2^2)chb_2/2}{\frac{P_{в1}P_{в2}}{2}\exp(-h_1^2-h_2^2)(chb_2ch2R+shb_2sh2R)+\frac{P_{в1}(1-P_{в2})}{2}\exp(-h_1^2)}\right]=$$

$$=b_1+\ln\left[\frac{2(1-P_{в1})(1-P_{в2})\sqrt{(1-th^2b_2)(1-th^2 2R)}+(1-P_{в1})P_{в2}\sqrt{1-th^2 2R}\exp(-h_2^2)}{P_{в1}P_{в2}[1+th^2b_2th^2 2R]\exp(-h_1^2-h_2^2)+P_{в1}(1-P_{в2})\sqrt{(1-th^2b_2)(1-th^2 2R)}\exp(-h_1^2)}\right]=b_1+\beta.$$

В результаті ППР в явному виді

$$r_1^*=2rect(-b_1+\alpha)\cdot rect(b_1+\beta)+rect(-b_1+\gamma)\cdot[1-rect(-b_1+\alpha)\cdot rect(b_1+\beta)]. \quad (5)$$

Одержане ППР (5) є узагальненням ППР (2).

Насамкінець зазначимо наступне. Якщо $P_{в1}$, $P_{в2}$ – невідомі, то слід визначати $P_{в1}=P_{в2}=0,5$. Тоді

$$p(r_1=1/y_t)-p(r_1=0/y_t)=-b_1+Arth\frac{thb_2th2R}{1+\sqrt{(1-th^2b_2)(1-th^2 2R)}\exp 2h_2^2};$$

$$p(r_1=2/y_t)-p(r_1=0/y_t)=-b_1+\ln\left\{\frac{2+\exp(-h_2^2)chb_2}{\exp(-h_1^2)[\exp(-h_2^2)(chb_2ch2R-shb_2sh2R)+1]}\right\};$$

$$p(r_1=2/y_t)-p(r_1=1/y_t)=b_1+\ln\left\{\frac{2+\exp(-h_2^2)chb_2}{\exp(-h_1^2)[\exp(-h_2^2)(chb_2ch2R+shb_2sh2R)+1]}\right\}.$$

Представлений тут огляд процедур когерентного розділення ЦС, оптимальних за критерієм мінімуму імовірності помилки в оцінці ДП корисного сигналу, обмежений прикладами, коли конфліктують взаємно неортогональні сигнали – з класичною двійковою ФМ. На сьогодні також відомі результати синтезу алгоритмів розділення-демодуляції, оптимальних за вищезазначеним критерієм, коли сигнали характеризуються двійковою ФМ [7], коли один з сигналів (менш потужний) обробляється некогерентно [5], коли тактові частоти сигналів не співпадають [3], [7]; коли сигналів, що заважають – більш одного [3]. Окремо зазначимо тут, що всі алгоритми розділення-демодуляції, які синтезовані методами статистичної теорії розділення ЦС [1], [3], [5] - [12], як відгалуження в теорії багатокористувацького детектування призводять до найкращих результатів в завадостійкості, коли миттєві потужності сигналів, відрізняються на 6 дБ або більше [1], [3], [7] - [11].

Висновки. 1. Результати порівняльного огляду алгоритмів розділення двох взаємно неортогональних сигналів двійкової ФМ демонструють їх еволюційний характер. Виявлені основні закономірності надають змогу одержувати описи процедур розділення сигналів з неспівпадаючими тактовими частотами без виконання проміжних процедур обробки сигналу. Наприклад, коли тактові точки корисного сигналу співпадають з деякими точками сигналу з більшою тактовою частотою, то компенсуюча складова в аргументі ППР буде містити точно N компонентів виду $Arth(.)$, де N – відношення довжини інформаційного тактового інтервалу корисного довільного сигналу до довжини тактового інтервалу сигналу, що заважає, і його вплив підлягає компенсації.

2. Одержані результати є підґрунтям для проведення подальших досліджень з метою розв'язання подібних задач. Першочерговому розгляду в майбутньому підлягають задачі, які мають теоретичний інтерес і практичну цінність:

– коли обидва сигнали характеризуються нестаціонарним переривчастим режимом випромінювання;
– коли вони асинхронні за тактовими точками;
– коли вони характеризуються пакетним режимом передачі;
– коли застосовуються смуго-ефективні види модуляції (MSK, GMSK – в першу чергу).

3. На окрему увагу заслуговує аналіз чутливості алгоритмів розділення до точності оцінки неінформаційних параметрів сигналів, що підлягають розділенню, в першу чергу енергетичних.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

[1] Д. Л. Бураченко, та В. Ф. Єрохин, "Алгоритм разделения аддитивных неортогональных синхронных сигналов", *Радиотехника*, № 12, с. 58-59, 1985.

[2] S. Verdu, "Minimum probability of error for synchronous Gaussian multiple-access channels", *IEEE Transactions Information Theory*, № 32, pp. 85-96, 1986, doi: https://doi.org/10.1109/TIT.1986.1057121.

[3] Д. Л. Бураченко, *Оптимальное разделение цифровых сигналов многих пользователей в линиях и сетях связи в условиях помех*, Ленинград, СССР: ВАС, 1990.

[4] S. Verdu, *Multiuser detection*, Cambridge, UK: Cambridge university Press, 1998.

[5] В. Ф. Єрохін, та І. М. Крутофіст, "Алгоритм демодуляції, що забезпечує повторне використання частот цифрового радіомовлення", *Захист інформації*, ДУТ, № 25, с. 42-47, 2005.

[6] В. И. Бобровский, *Многопользовательское детектирование*, Ульяновск, Россия: Вектор-С, 2007.

[7] В. Ф. Єрохін, та В. М. Раєвський, "Синтез алгоритмів оптимального розділяння двостанових взаємнозаважаючих гетерохронних сигналів з частотною маніпуляцією", *Радіотехніка*, Харків, Україна: ХНУРЕ, № 156, с. 78-84., 2009.

[8] В. Ф. Єрохін, та Є. В. Пелешок, "Оптимальні алгоритми розділення двох взаємно неортогональних сигналів", *Вісник НТУУ КПІ, Серія Радіотехніка, Радіоапаратобудування*, вип. 49, с. 33-41, 2012.

[9] В. Ф. Єрохін, *Багатокористувацьке детектування: Навчальний посібник*, Київ, Україна: ІСЗЗІ КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2017.

[10] В. Ф. Єрохін, та В. В. Карплюк, "Алгоритм компенсації подібної сигналу асинхронної завади з двійковою фазовою маніпуляцією", *Збірник наукових праць "Спеціальні телекомунікаційні системи та захист інформації"*, Київ, Україна: ІСЗЗІ КПІ ім. Ігоря Сікорського, вип. 2 (2), с. 27-35, 2017.

[11] В. Ф. Єрохін, та М. С. Ірха, "Методика та результати синтезу і аналізу потенціальної завадостійкості компенсатора асинхронної переривчастої завади, подібної до корисного фазоманіпульованого сигналу", *Вісник НТУУ "КПІ", Серія Радіотехніка, Радіоапаратобудування*, с. 14-24, 2020.

[12] В. Ф. Єрохін, та О. В. Вакуленко, "Методика та результати синтезу алгоритмів розділення двох взаємно неортогональних переривчастих сигналів двійкової ФМ", *Збірник наукових праць "Спеціальні телекомунікаційні системи та захист інформації"*, Київ, Україна: ІСЗЗІ КПІ ім. Ігоря Сікорського, № 1 (34), с. 5-13, 2021.

Стаття надійшла до редакції 03.01.2022

REFERENCE

[1] D. L. Burachenko, and V. F. Yerokhin, "Algorithm for separating additive non-orthogonal synchronous signals", *Radiotekhnika*, no. 12, pp. 58-59, 1985.
[2] S. Verdu, "Minimum probability of error for synchronous Gaussian multiple-access channels", *IEEE Transactions Information Theory*, no. 32, pp. 85-96, 1986, doi: https://doi.org/10.1109/TIT.1986.1057121.
[3] D. L. Burachenko, *Optimum separation of digital signals of many users in lines and communication networks in the presence of interference*. Leningrad, USSR: MCA, 1990.
[4] S. Verdu, *Multiuser detection*, Cambridge, UK: Cambridge university Press, 1998.
[5] V. F. Yerokhin, and I. M. Krutofist, "Demodulation Algorithm, which secures re-changing digital radio frequencies", *Protection of Information. Scientific and technical journal*, DUT, no. 25, pp. 42-47, 2005.
[6] V. I. Bobrovsky, *Multiuser detection*, Ulyanovsk, Russia: Vector-S, 2007.
[7] V. F. Yerokhin, and V. M. Raevskiy, "Synthesis of algorithms for the optimal separation of two-way mutually dependent heterochronous signals with frequency shifting", *Radiotekhnika*, Kharkiv, Ukraine: KHNURE, no. 156, pp. 78-84, 2009.
[8] V. F. Yerokhin, and Y. V. Peleshok, "Optimal algorithms for separating two mutually non-orthogonal signals", *Bulletin of NTUU KPI, Series Radio engineering, Radio equipment*, no. 49, pp. 33-41, 2012, doi: https://doi.org/10.20535/RADAP.2012.49.33-41.
[9] V. F. Yerokhin, *Bagatokoristuvatske detection: Training manual*, Kyiv, Ukraine: ISCIP of Igor Sikorsky KPI, 2017.
[10] V. F. Yerokhin, and V. V. Karplyuk, "Algorithm for compensation similar to the signal of an asynchronous drive with two-way phase manipulation", *Collection of scientific practices "Special telecommunication systems and information"*, Kyiv, Ukraine: ISCIP of Igor Sikorsky KPI, vol. 2 (2), pp. 27-35, 2017.
[11] V. F. Yerokhin, and M. S. Irkha, "Methodology and results for the synthesis and analysis of the potential susceptibility of the compensator of an asynchronous intermittent waveform, similar to the coronal phase-shift keyed signal", *Bulletin of NTUU KPI, Series Radio engineering, Radio equipment*, no. 82, pp. 14-24, 2020, doi: https://doi.org/10.20535/RADAP.2020.82.14-24.
[12] V. F. Yerokhin, and O. V. Vakulenko, "Methodology and results for the synthesis of algorithms for separating two mutually non-orthogonal intermittent signals in two-part FM", *Collection of scientific practices "Special telecommunication systems and information"*, Kyiv, Ukraine: ISCIP of Igor Sikorsky KPI, no. 1 (34), pp. 5-13, 2021.

VIKTOR YEROKHIN,
OLEKSANDR VAKULENKO

EVOLUTOIN OF ALGORITHMS FOR SEPARATION OF OPTIMAL TWO MUTUALLY UNORTHOGONAL SIGNALS OF BINARY PHASE MODULATION

A review of the results of the development of the methodology for the synthesis of the separation-demodulation algorithms of two mutually non-orthogonal binary phase modulation signals in the length of the information clock interval, synchronous and asynchronous according to the clock points, with continuous and intermittent radiation. The evolution of algorithms for optimal separation of two mutually non-orthogonal signals of binary phase modulation has the following sequence: signals are mutually synchronous by clock points (communication channel – with constant parameters, nonseeding oscillations are represented by functions integrated with the square; the signals are mutually synchronous in clock points, the second interfering signal is intermittent; signals are mutually asynchronous in clock points; the signals are mutually asynchronous in clock points, the second interfering signal is intermittent; signals are mutually synchronous in clock points, both signals are discontinuous. At the same time, the minimum probability of an error in the estimation of the discrete information parameter of the first (useful) signal was assumed as the optimality criterion. The results of a comparative review of algorithms for the separation of two mutually non-orthogonal binary FM signals demonstrate their evolutionary nature. The identified main regularities make it possible to obtain descriptions of signal separation procedures with mismatched clock frequencies without performing intermediate signal processing procedures. The gradual process of complicating synthesis tasks led to the discovery of gradual regularities in the structures of the separation-demodulation algorithms of two binary FM signals, which provides an opportunity to formulate directions for further research, which should be based on the provisions of the theory of multi-user detection. Namely, the revealed regularities are the basis for conducting further research in order to solve similar problems with the gradual further complication of the initial conditions. Priority consideration in the future will be given to tasks that have theoretical interest and practical value: when both signals are characterized by non-stationary intermittent emission modes and are asynchronous in clock points; when they are characterized by packet transmission mode; when band-efficient types of modulation are used (MSK, GMSK – first of all).

Keywords: multiuser detection theory, mutually non-orthogonal digital signals, discrete information parameter, decision-making rule, intermittent noise similar to useful signal, integral of signal function, a posteriori probabilities.

Єрохін Віктор Федорович, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри спеціальних телекомунікаційних систем, Інститут спеціального зв’язку та захисту інформації Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”, Київ, Україна, ORCID 0000-0002-8722-4087, stddssss@gmail.com.

Вакуленко Олександр Володимирович, аспірант, Інститут спеціального зв’язку та захисту інформації Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”, Київ, Україна, ORCID 0000-0001-8094-8675, tzadikalex@gmail.com.

Yerokhin Viktor, doctor of technical science, professor, head of special telecommunication systems academic department, Institute of special communication and information protection of National technical university of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”, Kyiv, Ukraine.

Vakulenko Oleksandr, postgraduate student, Institute of special communications and information protection of National technical university of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”, Kyiv, Ukraine.

DOI 10.20535/2411-1031.2022.10.1.261179
УДК 621(372.8+396.67)

ОЛЕНА МАВРІНА

МЕТОДИКА КОНСТРУКТИВНОГО СИНТЕЗУ АНТЕННОЇ СИСТЕМИ ЗАСОБУ РАДІОЗВ’ЯЗКУ ПОБУДОВАНОЇ НА НИЗЬКОРОЗТАШОВАНИХ ВИПРОМІНЮВАЧАХ

Останні роки суттєвої модернізації зазнають системи радіозв’язку. Це стосується як проєктування й розробки нових засобів зв’язку так і удосконалення та модернізації існуючих та розробки нових антенно-фідерних пристроїв до них. Загальною особливістю мереж радіозв’язку є суттєва залежність основних характеристик об’єктів зв’язку від типу та параметрів