MATHEMATICAL AND COMPUTER MODELING

DOI 10.20535/2411-1031.2022.10.1.261132
УДК 004.942

ДМИТРО МОГИЛЕВИЧ,
ВІКТОРІЯ СІНЬКО

МОДЕЛІ НАДІЙНОСТІ ОБ'ЄКТІВ ТЕЛЕКОМУНІКАЦІЙНОГО ОБЛАДНАННЯ З НЕЗНЕЦІНЕНИМИ АБО ПОВНІСТЮ ЗНЕЦІНЕНИМИ ВІДМОВАМИ ПРОГРАМНИХ ЗАСОБІВ

До основних особливостей телекомунікаційного обладнання сучасних мереж зв'язку слід віднести перш за все те, що вони є складними апаратно-програмними комплексами. Програмні засоби поряд з апаратною (технічною) частиною мають помітний вплив на надійність функціонування телекомунікаційного обладнання мереж зв'язку, оскільки відмови та збої програмних засобів часто призводять до не менш тяжких наслідків, ніж відмови техніки. Предметом теоретичного дослідження є процеси функціонування об'єктів телекомунікаційного обладнання в умовах обмеженої надійності програмних засобів з метою побудови моделей надійності об'єктів з урахуванням використання непоповнювальних резервів часу для компенсації наслідків різноманітних типів відмов. За характером наслідків всі відмови програмних засобів можуть бути розділені на три групи: незнецінені, частково знецінені та повністю знецінюють попереднє напрацювання. Результатом побудови надійності об'єктів телекомунікаційного обладнання з непоповнювальним резервом часу є отримання аналітичних моделей, що встановлюють зв'язок між показниками надійності функціонування об'єктів, характеристиками відмов програмних засобів та їх наслідків, а також сукупністю технічних параметрів об'єкта, що визначають умови його функціонування. Сутність новизни цих моделей полягає у сумісному врахуванні факторів, що забезпечують компенсацію (зменшення) впливу наслідків відмов програмних засобів на процес функціонування об'єктів телекомунікаційного обладнання, зокрема, використання непоповнювального резерву часу, а також розбиття завдання, що виконуються об'єктами, на ряд послідовно виконуваних етапів з запам'ятовуванням проміжних результатів та обґрунтуванням оптимальної кількості етапів. В процесі досягнення мети дослідження отримав подальший розвиток диференційний метод, суть якого полягає у побудові більш загальної, порівняно з відомими, моделі тривимірного однорідного марківського процесу, який описує функціонування об'єктів телекомунікаційного обладнання при відмовах та збоях програмних засобів, частина з яких не знецінює, а частина – повністю знецінює попереднє напрацювання об'єктів телекомунікаційного обладнання, що виконують певні завдання.

Ключові слова: моделі надійності, телекомунікаційне обладнання, відмови, програмні засоби, резерв часу.

Постановка проблеми. Сучасні об'єкти телекомунікаційного обладнання (ТКО) мереж зв'язку (МВЗ) є складними апаратно-програмними комплексами (АПК) – взаємозалежні технічні та програмні засоби (ПЗ), за допомогою яких здійснюється процес обміну інформацією між абонентами в МВЗ. До технічних засобів належать апаратура каналоутворення, пристрої комутації та маршрутизації, сервери, апаратура IP шифрування, кінцеве та інше обладнання. У складі програмних засобів ("м'якого обладнання" – software) АПК зазвичай виділяють три частини: математичне забезпечення (сукупність математичних моделей, методів та алгоритмів), інформаційне забезпечення (сукупність баз даних із системами управління, файлових структур з каталогами, констант та інших елементів) та програмне (системне,

© Д. Могилевич, В. Сінько, 2022

функціональне, інструментальне) забезпечення [1]. Програмні засоби суттєво впливають на надійність функціонування телекомунікаційного обладнання мереж зв'язку, оскільки відмови та збої ПЗ часто призводять до не менш тяжких наслідків, ніж відмови технічних засобів. Тому актуальним є підхід, при якому надійність ПЗ оцінюється за ступенем впливу відмов та збоїв програмних засобів на узагальнені показники надійності функціонування ТКО, що мають в своєму складі велику кількість різноманітних програмних засобів. Предметом теоретичного дослідження є процеси функціонування об'єктів телекомунікаційного обладнання в умовах обмеженої надійності програмних засобів з метою побудови моделей надійності об'єктів з урахуванням використання непоповнювальних резервів часу для компенсації наслідків різноманітних типів відмов.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Завдання побудови математичних моделей та розвитку методів аналізу надійності технічних систем загалом, так і ПЗ зокрема, розглядалися в роботах вітчизняних та закордонних вчених [2] - [9]. Основними напрямками дослідження в цих роботах є вивчення програмних помилок, виявлення причин, що їх викликають, а також наслідків їх прояву; розгляд різних моделей оцінки надійності ПЗ; класифікація існуючих способів підвищення надійності програмних комплексів та ін. В розглянутих наукових працях практично відсутні результати, що стосуються дослідження впливу обмеженої надійності ПЗ на надійність функціонування ТКО. Тому вибір напрямку дослідження – розробка аналітичних моделей, які встановлюють зв'язок між показниками надійності функціонування об'єктів, характеристиками відмов програмних засобів та їх наслідків, а також сукупністю технічних параметрів об'єкта є обґрунтованим та актуальним.

Метою статті є отримання розрахункових аналітичних співвідношень, що встановлюють зв'язок між показниками надійності об'єктів ТКО з непоповнювальним резервом часу, характеристиками відмов програмних засобів та їх наслідків і параметрами процесу функціонування об'єктів.

Виклад основного матеріалу дослідження. 1. Відмови програмних засобів, які незнецінюють попереднє напрацювання об'єктів. Розглянемо систему об'єкт – час (ОЧ), що включає в собі об'єкт, представлений одним узагальненим відновленим елементом, і непоповнювальний резерв часу. Об'єкт призначений для виконання деякого завдання певної тривалості $t_з$. Величина $t_з$ може бути випадковою або невипадковою. В подальшому для простоти міркувань будемо розглядати випадок $t_з = const$. В процесі виконання завдання можуть виникати відмови програмних засобів, що призводять до затримки виконання завдання. Після завершення відновлення працездатності об'єкта виконання завдання продовжується з урахуванням виконаної до моменту відмови роботи (система з незнеціненими відмовами). Нехай напрацювання об'єкта між відмовами $t_н$ має такий же розподіл $F(t)$ з кінцевим математичними очікуванням $\bar{t}_и$, що і напрацювання t_0 до першої відмови, а час відновлення – розподіл $F_в(t)$ з кінцевим математичним очікуванням $\bar{t}_в$ незалежно від кількості відмов в минулому. Вважаємо, що відмови виявляються миттєво, а ремонт повністю відновлює всі властивості об'єкта [10].

Систему утворюють об'єкт та непоповнювальний резерв часу $t_р$. Відмови об'єкта не знецінюють попереднє напрацювання, тому резервний час витрачається тільки в непрацездатному стані об'єкта e_1 пропорційно часу відновлення. Завдання вважається виконаним в момент часу, коли сумарне напрацювання досягне величини $t_з$, причому до цього моменту сумарний час відновлення повинно бути менше $t_р$. Момент відмови системи співпадає з моментом часу, коли виявляється повністю вичерпаним резерв часу $t_р$ незалежно від досягнутого напрацювання.

Для сформульованих вище умов необхідно отримати аналітичний вираз для основних показників надійності системи.

В якості математичної моделі, яка описує процес функціонування системи, що розглядається, використовуємо напівмарківський процес, а при виборі рівнянь для вирішення задачі скористуємося інтегральним методом. Позначимо через $P^{(i)}\left(t_з, t_p\right)$ ймовірність безвідмовного функціонування системи до напрацювання $t_з$ за наявності непоповнювального резерву часу $t_р$ і початковому стані об'єкта i: $i=0$ – працездатний стан, $i=1$ – непрацездатний. В початковому працездатному стані складну подію «виконання завдання» можна представити у вигляді суми двох несумісних подій: перша – до напрацювання $t_з$ не буде жодного порушення працездатності об'єкту; друга – до напрацювання $t_з$ виникне відмова об'єкта, але завдання буде виконано вчасно. За формулою додавання імовірностей несумісних подій отримуємо

$$P^{(0)}\left(t_з, t_р\right)=1-F\left(t_з\right)+\int_0^{t_з} P^{(1)}\left(t_з-x, t_р\right)dF(x) \tag{1}$$

Другий доданок в цій формулі представляє собою ймовірність того, що об'єкт відмовить в момент x, але далі, продовжуючи функціонувати із стану $i=1$, він своєчасно виконає завдання, маючи резерв часу $t_р$.

При непрацездатному початковому стані об'єкта $(i=1)$ система ОЧ витрачає резерв часу до завершення відновлення об'єкта в момент y і далі, маючи залишок резерву часу $t_р-y$, виконає завдання з імовірністю $P^{(0)}\left(t_з, t_р-y\right)$.

Тому
$$P^{(1)}\left(t_з, t_р\right)=\int_0^{t_р} P^{(0)}\left(t_з, t_р-y\right)dF_в(y). \tag{2}$$

Представляючи (2) в (1), зводимо два рівняння в одне:

$$P^{(0)}\left(t_з, t_р\right)=1-F\left(t_з\right)+\int_0^{t_з}\int_0^{t_р} P^{(0)}\left(t_з-x, t_р-y\right)dF_в(y)dF(x). \tag{3}$$

Аналогічно знаходимо:

$$P^{(1)}\left(t_з, t_р\right)=1-F\left(t_з\right)F_в\left(t_р\right)+\int_0^{t_з}\int_0^{t_р} P^{(1)}\left(t_з-x, t_р-y\right)dF_в(y)dF(x). \tag{4}$$

Для функцій $P_1\left(t_з, t\right)$ та $P_2\left(t, t_р\right)$ рівняння мають вигляд:

$$P_1^{(0)}\left(t_з, t\right)=1-F\left(t_з\right)+\int_0^{t_з}\int_0^{t-t_з} P_1^{(0)}\left(t-x-y, t_р-y\right)dF_в(y)dF(x), t_з \le t, \tag{5}$$

$$P_2^{(0)}\left(t, t_р\right)=1-F\left(t-t_р\right)+\int_0^{t-t_р}\int_0^{t_p} P_2^{(0)}\left(t_з-x, t-x-y\right)dF_в(y)dF(x), t \ge t_р. \tag{6}$$

Коефіцієнт оперативної готовності системи $P_{ог}\left(t_з, t_p\right)$ визначається за формулою

$$P_{ог}\left(t_з, t_р\right)=k_г P^{(0)}\left(t_з, t_р\right)+\left(1-k_г\right)P^{(1)}\left(t_з, t_р\right).$$

Підставляючи в цю формулу вираз (1) і (2), отримуємо

$$\begin{aligned} P_{oг}\left(t_з, t_p\right) &= k_г\left(1-\tilde{F}\left(t_з\right)\right)+k_г\int_0^{t_з} P^{(1)}\left(t_з-x, t_p\right)d\tilde{F}(x)+ \\ &+\left(1-k_г\right)\int_0^{t_p} P^{(0)}\left(t_з, t_p-y\right)d\tilde{F}_в(y), \end{aligned} \tag{7}$$

де
$$\tilde{F}(t)=\frac{1}{\tilde{t}_0}\int_0^t\left(1-F(\tau)\right)d\tau;\ \ \tilde{F}_в(t)=\frac{1}{\tilde{t}_в}\int_0^t\left(1-F_в(\tau)\right)d\tau. \tag{8}$$

В формулі (7) перший доданок представляє собою ймовірність безвідмовного функціонування об'єкту при виконанні очікуваної задачі (без врахування резерву часу). Решта два доданки складають збільшення, що виникли завдяки використанню резерву часу.

Для знаходження коефіцієнту готовності системи ОЧ використовуємо його імовірнісне визначення. Для системи, що розглядається

$$P\{t_{\text{в}} < t_{\text{в}}^{*}\} = \tilde{F}_{\text{в}}(t_{\text{р}}),$$

тому при $t_{\text{з}} = 0$ отримуємо

$$K_{\text{г}}(t_{\text{р}}) = \left[\bar{t}_0 + \int_0^{t_{\text{р}}} (1 - F_{\text{в}}(x))dx\right] \Big/ (\bar{t}_0 + \bar{t}_{\text{в}}). \tag{9}$$

Для вирішення інтегральних рівнянь (3) – (6) скористуємося подвійним операційним перетворенням Лапласа-Стілтьєса.

Нехай

$$P^{**}(s,w) = sw\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} P(t_{\text{з}}, t_{\text{р}}) e^{-st_{\text{з}} - wt_{\text{р}}} dt_{\text{з}} dt_{\text{р}}, \tag{10}$$

$$P_1^{**}(s,w) = sw\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} P_1^{(0)}(t_{\text{з}}, t) e^{-st_{\text{з}} - wt} dt_{\text{з}} dt, \tag{11}$$

$$P_2^{**}(s,w) = sw\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} P_2^{(0)}(t, t_{\text{р}}) e^{-st - wt_{\text{р}}} dt dt_{\text{р}}. \tag{12}$$

Застовуючи в правій частині (3) двічі теорему про згортку операційного перетворення та вирішуючи алгебраїчне рівняння відносно невідомого зображення $P^{(0)}(t_{\text{з}}, t_{\text{р}})$, отримуємо

$$P^{(0)**}(s,w) = \frac{1 - f(s)}{1 - f(s) f_{\text{в}}(w)} = 1 - \frac{f(s)[1 - f_{\text{в}}(w)]}{1 - f(s) f_{\text{в}}(w)}, \tag{13}$$

де

$$f(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} dF(x); \quad f_{\text{в}}(w) = \int_0^{\infty} e^{-wy} dF_{\text{в}}(y).$$

Аналогічно з формул (2), (11), (12) та (7) знаходимо рівняння відносно відомих зображень $P^{(1)}(t_{\text{з}}, t_{\text{р}})$, $P_1^{(0)}(t_{\text{з}}, t)$, $P_2^{(0)}(t, t_{\text{р}})$ та $P_{\text{ог}}(t_{\text{з}}, t_{\text{р}})$:

$$P^{(1)**}(s,w) = \frac{f_{\text{в}}(w)[1 - f(s)]}{1 - f(s) f_{\text{в}}(w)}; \tag{14}$$

$$P_1^{(0)**}(s,w) = \frac{s}{s+w} \cdot \frac{1 - f(s+w)}{1 - f(s+w) f_{\text{в}}(w)}; \tag{15}$$

$$P_2^{(0)**}(s,w) = 1 - \frac{w}{s+w} \cdot \frac{f(s)[1 - f_{\text{в}}(s+w)]}{1 - f(s) f_{\text{в}}(s+w)}; \tag{16}$$

$$P^{**}(s,w) = k_{\text{г}}\left[1 + \frac{(1 - f(s))(1 - f_{\text{в}}(w))(s-w)}{sw\bar{t}_0(1 - f(s) f_{\text{в}}(w))}\right]. \tag{17}$$

Зауважимо, що формулу (13) доцільно використовувати для отримання моментів випадкових величин:

- напрацювання системи ОЧ до відмови $T_0^{(0)}(t_{\text{р}})$;
- часу простою системи до напрацювання $t_{\text{з}}$ $T_{\text{нп}}(t_{\text{з}})$.

Так, середнє напрацювання до відмови

$$\bar{T}_0^{(0)}(t_{\text{р}}) = \lim_{s \to 0} \frac{1}{s} P^{(0)*}(s, t_{\text{р}}) = \bar{t}_0 + \bar{T}_0^{(1)}(t_{\text{р}}); \quad \bar{T}_0^{(0)*}(w) = \lim \frac{1}{s} P^{(0)**}(s,w).$$

Підставляючи сюди формулу (13), отримаємо

$$\overline{T}_0^{(0)*}(w)=\frac{\bar{t}_0}{1-f_{\text{в}}(w)};\quad \overline{T}_0^{0}(t_{\text{р}})=\bar{t}_0\sum_{k=0}^{\infty}F_{\text{в}k}(t_{\text{р}}), \tag{18}$$

де $F_{\text{в}k}(t_{\text{р}})$ – ймовірність того, що сумарний час відновлення після k відмов не буде перевищувати резервного часу $t_{\text{р}}$.

Аналогічно знаходять середній час простою системи до напрацювання $t_{\text{з}}$

$$\overline{T}_{\text{нп}}^{(0)}(t_{\text{з}})=\int_0^{\infty}Q^{(0)}(t_{\text{з}},t_{\text{р}})dt_{\text{р}}=\lim_{w\to 0}\frac{1}{w}Q^{(0)*}(t_{\text{з}},w);\ \overline{T}_{\text{нп}}^{(0)*}(s)=\lim_{w\to 0}\frac{1}{w}Q^{(0)**}(s,w).$$

Підставляючи сюди (13), отримаємо

$$\overline{T}_{\text{нп}}^{(0)*}(s)=\bar{t}_{\text{в}}f(s)/(1-f(s))=\bar{t}_{\text{в}}H^{*}(s);\ \overline{T}_{\text{нп}}^{(0)}=\bar{t}_{\text{в}}H(t_{\text{з}}), \tag{19}$$

де $H(t_{\text{з}})$ – середній час відмов до заданого напрацювання $t_{\text{з}}$.

Таким чином, для напівмарківської моделі отримані в загальному вигляді (у вигляді операційних перетворень Лапласа-Стілтьєса) вирішення інтегральних рівнянь для основних показників надійності функціонування об’єктів ТКО з непоповнювальним резервом часу. Виконуючи зворотне перетворення за конкретними законами розподілу $F(t)$ та $F_{\text{в}}(t)$ (наприклад, при розподілах Ерланга, Вейбулла, гамма-розподілу) можна отримати оригінали формул для цих показників. Однак ці формули, як правило, надмірно громіздкі і мало придатні для практичного використання [10].

В подальшому обмежимося розглядом марківської моделі, за якої

$$F(t)=1-e^{-\lambda t};\ F_{\text{в}}(t)=1-e^{-\mu t}. \tag{20}$$

У низці робіт показано, що на практиці експлуатації ТКО експоненціальний закон розподілу напрацювання програмних засобів до відмови $F(t)$ і часу відновлення працездатності об’єктів $F_{\text{в}}(t)$ підтверджується достатньо часто [11].

В цьому випадку, згідно (13)

$$f(s)=\frac{\lambda}{\lambda+s};\quad f(w)=\frac{\mu}{\mu+w};\quad P^{(0)**}(s,w)=\frac{s}{s+\lambda(1-f_{\text{в}}(w))}. \tag{21}$$

Виконаємо зворотне перетворення в (21) у два етапи: спочатку по s, представивши (21) у вигляді

$$P^{(0)*}(t_{\text{з}},w)=\exp\left(-\frac{\lambda t_{\text{з}}w}{\mu+w}\right), \tag{22}$$

а потім по w, підставивши в (22) вираз $f_{\text{в}}=\dfrac{\mu}{\mu+w}$.

В результаті отримаємо розрахункову формулу для ймовірності безвідмовного функціонування системи ОЧ:

$$P^{(0)}(t_{\text{з}},t_{\text{р}})=e^{-\rho}\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\rho^k}{k!}\text{I}(k,\gamma)\right),\ \rho=\lambda t_{\text{з}},\ \gamma=\mu t_{\text{р}}, \tag{23}$$

де $\text{I}(k,\gamma)=1-\sum_{i=0}^{k-1}\dfrac{\gamma^i}{i!}e^{-\gamma}$ – неповна гамма-функція [11].

Якщо в початковий момент часу об’єкт непрацездатний, то, використовуючи (14), можна отримати вираз для $P^{(1)}(t_{\text{з}},t_{\text{р}})$:

$$P^{(1)}(t_{\text{з}},t_{\text{р}})=e^{-\rho}\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\rho^k}{k!}\text{I}(k+1,\gamma)\right)=P^{(0)}(t_{\text{з}},t_{\text{р}})-e^{-\rho-\gamma}\text{I}_0\left(2\sqrt{\rho\gamma}\right), \tag{24}$$

де $\text{I}_0(x)$ – модифікована функція Бесселя нульового порядку [10],

$$\mathrm{I}_0(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x/2)^{2k}}{(k!)^2} \tag{24a}$$

Ймовірність $P^{(0)}(t_з,t_р)$ можна представити в іншому вигляді, якщо скористатися методом послідовних наближень [12]:

$$P^{(0)}(t_з,t_р)=1-\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\gamma^i}{i!}e^{-\gamma}\left(1-\sum_{k=0}^{i}\frac{\rho^k}{k!}e^{-\rho}\right). \tag{25}$$

Цю формулу зручно використовувати для визначення інтенсивності відмов $\Lambda(t_з,t_р)$ системи ОЧ.

Диференціюючи почленно ряд в (25), отримуємо

$$\frac{\partial Q(t_з,t_р)}{\partial \mathrm{t}_з}=\lambda e^{-\rho-\gamma}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\rho\gamma)^k}{(k!)^2}=\lambda e^{-\rho-\gamma}\mathrm{I}_0\left(2\sqrt{\rho\gamma}\right),$$

а інтенсивність відмов системи обчислюємо за формулою:

$$\Lambda(t_з,t_р)=\frac{\lambda e^{-\rho-\gamma}\mathrm{I}_0\left(2\sqrt{\rho\gamma}\right)}{P^{(0)}(t_з,t_р)}, \tag{26}$$

де $P^{(0)}(t_з,t_р)$ визначається виразом (25), а $\mathrm{I}_0\left(2\sqrt{\rho\gamma}\right)$ – формулою (24а).

Використовуючи вираз (18), отримуємо розрахункове співвідношення для середнього напрацювання системи до відмови

$$\overline{T}_0^{(0)}=(1+\mu t_р)/\lambda. \tag{27}$$

Оскільки для найпростішого потоку відмов програмних засобів $H(t_з)=\lambda t_з$, то з (19) маємо:

$$\overline{T}_{нп}^{(0)}(t_з)=\frac{\lambda}{\mu}t_з;\ \overline{T}_{вз}^{(0)}(t_з)=\left(1+\frac{\lambda}{\mu}\right)t_з=t_з/k_г. \tag{28}$$

Щоб отримати формулу для коефіцієнту оперативної готовності системи $P_{ог}(t_з,t_р)$, використаємо вирази (7) та (24):

$$\begin{gathered}P_{ог}(t_з,t_р)=k_г P^{(0)}(t_з,t_р)+(1-k_г)P^{(1)}(t_з,t_р)=\\ P^{(0)}(t_з,t_р)-(1-k_г)e^{-\rho-\gamma}\mathrm{I}_0\left(2\sqrt{\rho\gamma}\right).\end{gathered} \tag{29}$$

Формула для коефіцієнту готовності системи $K_г(t_р)$ (вираз (9)) у випадку марківської моделі (20) набуває вигляду:

$$K_г(t_р)=1-(1-k_г)e^{-\mu t_р}. \tag{30}$$

Таким чином, для марківської моделі отримані зручні для практичного використання розрахункові співвідношення для показників надійності функціонування (моделей надійності) об'єктів ТКО з непоповнювальним резервом часу та незнеціненими відмовами програмних засобів (формули (23) – (30)).

2. Відмови програмних засобів, що повністю знецінюють попереднє напрацювання об'єктів. Збережімо постановку задачі, що була розглянута в п.1, але внесемо в неї одну суттєву зміну. Будемо вважати, що кожна відмова, яка виникла до отримання необхідного напрацювання $t_з$, повністю знецінює результати вже виконаної роботи. Тому, корисне напрацювання стає рівним нулю, а невиробничі втрати часу стрибком збільшуються на величину знеціненого напрацювання. Далі резерв часу витрачається пропорційно тільки часу відновлення. Якщо резерв часу не буде витрачено до закінчення відновлення працездатності програмних засобів, то об'єкт знову приступає до виконання завдання у початковому обсязі, але маючи резерв часу, менший на величину знеціненого напрацювання і часу відновлення.

Вихідні дані для розрахунку показників надійності системи ті ж, що і для системи з незнеціненими відмовами. Як і при вирішенні попередньої задачі, скористуємося напівмарківською моделлю [11].

Рівняння для ймовірності безвідмовного функціонування системи (ймовірності виконання завдання) за умови, що в початковий момент часу об'єкт працездатний, має вигляд:

$$P^{(0)}(t_з, t_р) = 1 - F(t_з) + \int_0^{\min(t_з, t_р)} P^{(1)}(t_з, t_р - x)dF(x). \quad (31)$$

Другий доданок для $P^{(1)}(t_з, t_р)$ співпадає з (2). Підставляючи (2) в (31), зводимо два рівняння в одне:

$$P^{(0)}(t_з, t_р) = 1 - F(t_з) + \int_0^{\min(t_з, t_р)} \int_0^{t_р - y} P^{(0)}(t_з, t_р - y - \theta)dF_в(\theta)dF(y) \quad (32)$$

Виконуючи в (32) перетворення Лапласа-Стілтьєса по змінній $t_р$, отримуємо

$$P^{(0)*}(t_з, w) = \frac{1 - F(t_з)}{(1 - f_в(w))f(t_з, w)}, \quad (33)$$

де $f(t_з, w) = \int_0^{t_з} e^{-wx}dF(x).$

Після підстановки в (33) явних виразів $f_в(w)$ та $f(t_з, w)$ треба виконати зворотне перетворення Лапласа-Стілтьєса. З (33) знаходимо середнє значення невиробничого часу:

$$\overline{T}_{нп}(t_з) = \lim_{w \to \infty} \frac{1}{w}\left(1 - P^{(0)*}(t_з, w)\right) = \frac{\bar{t}_в F(t_з) + \bar{t}_0(t_з)}{1 - F(t_з)}, \quad (34)$$

де $\bar{t}_0(t_з) = \int_0^{t_з} xdF(x).$

Отримаємо далі формули для показників надійності системи у випадку марківської моделі (формули (20)). Використовуючи вираз (33), отримуємо

$$P^{(0)*}(t_з, w) = \frac{(1+a)e^{-\rho}}{1 + ae^{-\rho - wt_з}}, \; a = \frac{\lambda\mu}{w(w + \lambda + \mu)}, \; \rho = \lambda t_з. \quad (35)$$

Розкладаючи (35) за ступенями a та виконуючи зворотне перетворення, отримуємо формулу для ймовірності безвідмовного функціонування системи:

$$P^{(0)}(t_з, t_р) = \sum_{i=0}^{[t_р/t_з]} e^{-(i+1)\rho}\left[A_i(t_р - it_з) - A_{i+1}(t_р - it_з)\right], \quad (36)$$

де

$$A_0 = 1; A_i(t) = C_{2i-1}^i (pq)^i + \sum_{j=0}^{i-1} C_{i+j-1}^j C_{i-1}^j \frac{j!}{i!} p^i q^j (\lambda t)^{i-1-j} \times$$
$$\times \left(\frac{i(-1)^{i-j}}{i-j} \lambda t - (i+j)qe^{-(\lambda+\mu)t} \right); i \geq 1; p = 1 - q = \frac{\mu}{\lambda + \mu}. \quad (36a)$$

У загальному випадку формула (36) зайве громіздка і мало придатна для практичних розрахунків. В окремих випадках при

$$t_р \leq t_з \text{ та } t_з \leq t_0 \leq 2t_з,$$

що найбільш часто зустрічаються на практиці, з (36) можна отримати більш прості розрахункові співвідношення:

$$P^{(0)}(t_з, t_р) = e^{-\rho}\left[1 - A_1(t_р)\right], \; t_р \leq t_з, \quad (37)$$

де $A_1\left(\frac{x}{\lambda + \mu}\right) = pq(1 - x - e^{-x});$

$p = 1 - q = \frac{\mu}{\lambda + \mu};$

$\rho = \lambda t_з.$

$$P^{(0)}(t_з, t_р) = e^{-\rho}\left[1 - A_1(t_р)\right] + e^{-2\rho}\left[A_1(t_р - t_з) - A_2(t_р - t_з)\right],\ t_з \le t_р \le 2t_з, \quad (38)$$

де $A_2\left(\frac{x}{\lambda+\mu}\right) = (pq)^2\left(0{,}5x^2 - 2x + 3 - (3+x)e^{-x}\right),\ x = (\lambda+\mu)t.$

Для отримання середнього значення непродуктивного часу $\overline{T}_{нп}(t_з)$ і середнього часу виконання завдання $\overline{T}_{вз}(t_з)$ скористуємося формулами (34) та (35):

$$\overline{T}_{вз}(t_з) = t_з + \overline{T}_{нп}(t_з) = (\bar{t}_0 + \bar{t}_в)(e^{\rho} - 1);\ \bar{t}_0 = 1/\lambda;\ \bar{t}_в = 1/\mu. \quad (39)$$

При $\bar{t}_в << t_з$ можна значно спростити отримані вище формули, якщо покласти в них $\bar{t}_в = 0$:

$$P^{(0)}(t_з, t_р) = \sum_{i=0}^{[t_р/t_з]} (-1)^i \frac{(\gamma - i\rho)^i}{i!}\left(1 + \frac{\gamma - i\rho}{i+1}\right)e^{-(i+1)\rho}, \quad (40)$$

$$P^{(0)}(t_з, t_р) = (1+\rho)e^{-\rho},\ t_р \le t_з, \quad (41)$$

$$\overline{T}_{вз}(t_з) = (e^{\rho} - 1)/\lambda,\ \rho = \lambda t_з,\ \gamma = \lambda t_р. \quad (42)$$

Інтенсивність відмов $\Lambda(t_з, t_р)$ можна отримати із загальної формули

$$\Lambda(t_з, t_p) = \frac{\partial Q(t_з, t_p)}{\partial t_з} \Big/ P(t_з, t_p),$$

шляхом диференціювання по $t_з$ в формулах (36) або (40).

Висновки. Таким чином, отримані розрахункові співвідношення для показників надійності функціонування (моделі надійності) об'єктів ТКО з непоповнювальним резервом часу та відмовами програмних засобів, які повністю знецінюють попереднє напрацювання (формули (36) – (42)). Прикладне значення отриманих результатів полягає у тому, що вони можуть використовуватися під час аналізу та забезпечення надійності складних програмних комплексів та телекомунікаційного обладнання.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

[1] В. Яковина, та В. Мацелюх. "Огляд і аналіз моделей надійності програмного забезпечення", *Вісник Національного університету «Львівська політехніка». Серія: Комп'ютерні науки та інформаційні технології*, № 864, с. 130-140, 2017.

[2] W. Zhong, L. Wang, Z. Liu, and S. Hou, "Reliability Evaluation and Improvement of Islanded Microgrid Considering Operation Failures of Power Electronic Equipment", *Journal of Modern Power Systems and Clean Energy*, vol. 8, no. 1, pp. 111-123, 2020, doi: https://doi.org/10.35833/MPCE/2018.000666.

[3] M. Haque, and N. Ahmad, "Key issues in software reliability growth models", *Recent Advances in Computer Science and Communications*, vol. 13, no. 1, 2020, doi https://doi.org/10.2174/2666255813999201012182821.

[4] K. Raghuvanshi, A. Agarwal, K. Jain et al., "A time-variant fault detection software reliability model", *SN Appl. Sci.* 3, 18, 2021, doi: https://doi.org/10.1007/s42452-020-04015-z.

[5] P. Erto, M. Giorgio, and A. Lepore, "The Generalized Inflection S-Shaped Software Reliability Growth Model", *IEEE Trans Reliab*, no. 69 (1), pp. 228-244, 2020.

[6] V. Nagaraju, "Software Reliability Assessment: Modeling and Algorithms", *IEEE International Symposium on Software Reliability Engineering Workshops (ISSREW)*, Memphis, TN, pp. 166-169, 2018, doi: https://doi.org/10.1109/ISSREW.2018.000-4.

[7] Y. Kim, K. Song, H. Pham, and I. Chang, "A Software Reliability Model with Dependent Failure and Optimal Release Time", *Symmetry*, vol. 14, pp. 343, 2022, doi: https://doi.org/10.3390/sym14020343.

[8] М. М. Сенів, та О. О. Роїк, "Засоби розрахунку показників надійності програмного забезпечення на підставі моделі з урахуванням недосконалого відлагодження", *Науковий*

вісник НЛТУ України, т. 31, № 6, с. 87-91, 2021, doi: https://doi.org/10.36930/40310613. [Електронний ресурс]. Доступно: https://nv.nltu.edu.ua/Archive/2021/31_6/15.pdf. Дата звернення: Листоп. 11, 2021.

[9] В. С. Яковина, М. М. Сенів, та І. І. Симець, "Засоби автоматизованого формулювання умов працездатності складних технічних систем", *Науковий вісник НЛТУ України*, т. 29, № 9, с. 136-141, 2019.

[10] Ю. І. Грицюк, та Т. О. Муха, "Методи визначення якості програмного забезпечення", *Науковий вісник НЛТУ України*, т. 30, № 1, с.158-167, 2020.

[11] D. Mogylevych, I. Kononova, B. Kredentser, and I. Karadschow, "Comprehensive Reliability Assessment Technique of Telecommunication Networks Equipment with Reducible Structure", *Scientific Bulletin NTUU KPI. Series: Radio engineering and Radio equipment construction*, vol. 80, pp. 39-47, 2020.

[12] D. Mogylevych, and I. Kononova, "Improved Estimates for the Reliability Indicators of Information and Communication Network Objects with Limited Source Information", in *Advances in Information and Communication Technologies. UKRMICO 2018. Lecture Notes in Electrical Engineering*, M. Ilchenko, L. Uryvsky, and L. Globa, Eds., Springer, Champ., vol. 560, pp. 101-117.

Стаття надійшла до редакції 03.12.2021.

REFERENCE

[1] V. Yakovyna, and V. Matseliukh, "Review and analysis of software reliability models", *Scientific Bulletin of the Lviv Polytechnic National University. Series: Computer science and information technology*, pp. 130-140, 2017.

[2] W. Zhong, L. Wang, Z. Liu, and S. Hou, "Reliability Evaluation and Improvement of Islanded Microgrid Considering Operation Failures of Power Electronic Equipment", *Journal of Modern Power Systems and Clean Energy*, vol. 8, no. 1, pp. 111-123, 2020, doi: https://doi.org/10.35833/MPCE/2018.000666.

[3] M. Haque, and N. Ahmad, "Key issues in software reliability growth models", *Recent Advances in Computer Science and Communications*, vol. 13, no. 1, 2020, doi:https://doi.org/10.2174/2666255813999201012182821.

[4] K. Raghuvanshi, A. Agarwal, K. Jain et al., "A time-variant fault detection software reliability model", *SN Appl. Sci.* 3, 18, 2021, doi: https://doi.org/10.1007/s42452-020-04015-z.

[5] P. Erto, M. Giorgio, and A. Lepore, "The Generalized Inflection S-Shaped Software Reliability Growth Model", *IEEE Trans Reliab*, no. 69 (1), pp. 228-244, 2020.

[6] V. Nagaraju, "Software Reliability Assessment: Modeling and Algorithms", *IEEE International Symposium on Software Reliability Engineering Workshops (ISSREW)*, Memphis, TN, pp. 166-169, 2018, doi: https://doi.org/10.1109/ISSREW.2018.000-4.

[7] Y. Kim, K. Song, H. Pham, and I. Chang, "A Software Reliability Model with Dependent Failure and Optimal Release Time", *Symmetry*, vol. 14, p. 343, 2022, doi: https://doi.org/10.3390/sym14020343.

[8] M. Seniv, and O. Roik, "Techniques of calculating software reliability indicators based on models taking into account imperfect debugging ", *Scientific Bulletin of UNFU*, vol. 6, pp. 87-91, 2021, doi: https://doi.org/10.36930/40310613.

[9] V. Yakovyna, M.Seniv, I. Symets "Techniques of automated formulation of the condition of complex technical systems operability", *Scientific Bulletin of UNFU*, vol. 29. no. 9, pp. 136-141, 2019, doi: https://doi.org/10.36930/40290924.

[10] Yu. I. Hrytsiuk, and T. Mukha, "Methods for determining the quality of software", *Scientific Bulletin of UNFU*, vol. 30. no. 1, pp. 158-167, 2020, doi: https://doi.org/10.36930/40300127.

[11] D. Mogylevych, I. Kononova, B. Kredentser, and I. Karadschow, "Comprehensive Reliability Assessment Technique of Telecommunication Networks Equipment with Reducible Structure",

Scientific Bulletin NTUU KPI. Series: Radio engineering and Radio equipment construction, vol. 80, pp. 39-47, 2020.

[12] D. Mogylevych, and I. Kononova, "Improved Estimates for the Reliability Indicators of Information and Communication Network Objects with Limited Source Information", in *Advances in Information and Communication Technologies. UKRMICO 2018. Lecture Notes in Electrical Engineering*, M. Ilchenko, L. Uryvsky, and L. Globa, Eds., Springer, Champ., vol. 560, pp. 101-117.

DMYTRO MOGYLEVYCH,
VIKTORIIA SINKO

RELIABILITY MODELS OF TELECOMMUNICATION EQUIPMENT FACILITIES WITH NON-REPLENISHABLE OR COMPLETELY REPLENISHABLE SOFTWARE FAILURES

The main features of telecommunication equipment of modern communication networks include, first of all, that they are complex hardware and software complexes. Software, along with hardware (technical) part, has a significant impact on the reliability of telecommunications equipment of communication networks, as software failures and malfunctions often lead to no less serious consequences than hardware failures. The subject of theoretical research is the processes of operation of telecommunications equipment in conditions of limited reliability of software in order to build models of reliability of facilities, taking into account the use of non-replenishable time reserves to compensate for various types of failures. According to the nature of the consequences, all software failures can be divided into three groups: depreciated, partially depreciated and fully depreciate previous work. The result of building the reliability of telecommunications equipment with non-replenishing time reserve is to obtain analytical models that establish the relationship between indicators of reliability of facilities, characteristics of software failures and their consequences, as well as a set of technical parameters that determine the conditions its functioning. The essence of the novelty of these models is to jointly take into account the factors that compensate (reduce) the impact of software failures on the operation of telecommunications equipment, in particular, the use of non-replenishing time reserve, as well as breaking the tasks performed by objects successive stages with memorization of intermediate results and justification of the optimal number of stages. In the process of achieving the goal of the study was further developed differential method, the essence of which is to build a more general, compared to the known, model of three-dimensional homogeneous Markov process, which describes the operation of telecommunications equipment failures and malfunctions, some of which do not depreciate and part which completely devalues the previous development of telecommunications equipment that perform certain tasks.

Keywords: reliability models, telecommunication equipment, failures, software, time reserve.

Могилевич Дмитро Ісакович, доктор технічних наук, професор, старший науковий співробітник науково-дослідної спеціальної лабораторії Науково-дослідного центру, Інститут спеціального зв'язку та захисту інформації Національного технічного університету України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського", Київ, Україна, ORCID 0000-0002-4323-0709, mogilevich4@gmail.com.

Сінько Вікторія Володимирівна, ад'юнкт, Військовий інститут телекомунікацій та інформатизації імені Героїв Крут, Київ, Україна, ORCID 0000-0003-1380-3390, vika1795@gmail.com.

Mogylevych Dmytro, doctor of technical science, professor, senior researcher of the scientific and research special laboratory of the scientific and research center, Institute of special communication and information protection of National technical university of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", Kyiv, Ukraine.

Sinko Viktoriia, postgraduate student, Military institute of telecommunications and information technologies named after the Heroes of Kruty, Kyiv, Ukraine.